Alberta Albertella, Maria Antonia Brovelli,
Federica Migliaccio, Giovanna Sona

# ESERCIZI DI TRATTAMENTO STATISTICO DEI DATI

Probabilità
Variabili casuali a una dimensione
Variabili casuali bi-dimensionali
Covarianza

CittàStudiEdizioni

CittàStudiEdizioni: p.za L. da Vinci, 7 - 20133 Milano



Copertina: Studio Brief
Impaginazione elettronica: Cristina Giannetto
Disegni: Cinzia Vajani



Stampa: A.G. Bianca & Volta - Truccazzano

ISBN 88-251-7219-5

prima edizione: gennaio 1998

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Ristampa: | I | II | III | IV |
| | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 |

# Esercizi di trattamento statistico dei dati

Alberta Albertella, Maria Antonia Brovelli,
Federica Migliaccio, Giovanna Sona

## VOLUME I

### Introduzione

Durante gli ultimi anni, le autrici si sono occupate delle esercitazioni di diversi corsi di trattamento dati presso la Facoltà di Ingegneria del Politecnico di Milano. Ciò ha consentito la creazione di una ricca raccolta di problemi diversificata e rappresentativa dei vari argomenti in cui i corsi si articolano, comprendente sia i problemi proposti agli studenti durante le esercitazioni numeriche, sia i temi d'esame.

Si è pensato di fare cosa utile, non solo agli allievi ingegneri ma anche agli studenti di diverse altre discipline per le quali sono previsti dai piani di studio corsi di base di statistica, raccogliere in forma organica tutto il materiale a disposizione. Tale materiale è stato ampliato, ove necessario, e corredato per ogni argomento da cenni introduttivi aventi carattere di richiami teorici, utili a comprendere i successivi svolgimenti dei problemi.

Gli argomenti trattati sono stati suddivisi in due volumi:

I Calcolo delle probabilità, statistica descrittiva, propagazione della covarianza.

II Teoria della stima, inferenza statistica, catene di Markov, processi stocastici.

Per ogni capitolo di ciascun volume sono stati scelti diversi esercizi "rappresentativi", svolti nel dettaglio in modo da fornire delle linee-guida utili per la soluzione dei successivi esercizi proposti. Per gli esercizi non svolti sono comunque fornite le soluzioni, utili ai fini della verifica, in quasi tutti i casi. Fanno eccezione alcuni esercizi la cui soluzione non è di tipo numerico ma è rappresentata da espressioni analitiche piuttosto complesse.

Le conoscenze matematiche necessarie ai fini della comprensione della materia trattata e della soluzione degli esercizi derivano dai primi due corsi di Analisi Matematica e dal corso di Geometria. Quindi, anche tutte le notazioni matematiche utilizzate devono essere considerate ampiamente note. [1]

A proposito della soluzione numerica dei problemi e ai fini della verifica dei risultati, si noti che tutti i calcoli (sia per gli esercizi risolti che per quelli solo proposti) sono stati eseguiti con una precisione di $10^{-6}$.

Al termine di questi cenni introduttivi, le autrici desiderano ringraziare tutti coloro che a vario titolo hanno fornito ulteriore materiale per il testo o collaborazione nella revisione di alcuni capitoli. Vogliamo quindi ricordare i Proff. Luigi Mussio, Fausto Sacerdote e Fernando Sansó e i Dottori Mattia Crespi e Giovanna Venuti.

Ringraziamo inoltre il Prof. Paolo Baldi e la casa editrice McGraw-Hill per aver dato il permesso di utilizzare spunti da problemi tratti dal volume "Calcolo delle probabilitá e statistica", per il completamento del capitolo 1 "Calcolo delle probabilitá e teorema di Bayes".

Ringraziamo anche Cristina Giannetto e Cinzia Vajani per la collaborazione tecnica.

[1] Si noti che la matrice trasposta di una matrice $A$ è indicata con $A^+$.

# Esercizi di trattamento statistico dei dati
# Volume I

## Sommario

# 1 CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E TEOREMA DI BAYES

## Richiami di calcolo delle probabilità

**Definizione classica di probabilità (Laplace):** la probabilità $P$ di un evento è il rapporto fra il numero dei casi favorevoli al verificarsi dell'evento ed il numero dei casi possibili, supposti ugualmente possibili ed escludentesi a vicenda.

**Definizione a posteriori (Von Mises):** la probabilità $P$ di un evento è il limite cui tende la frequenza (relativa) di successo quando il numero delle prove tende all'infinito.

**Definizione assiomatica (Kolmogorov):** (definizione di distribuzione di probabilità in base alle proprietà assiomatiche cui deve soddisfare). Una distribuzione di probabilità sull'insieme $\Omega$ è una misura, che soddisfa gli assiomi della misura:

$$P(A) \geq 0 \quad , \quad P(\emptyset) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad \text{se } A \cap B = 0$$

e la relazione

$$P(\Omega) = 1 \ .$$

**Teorema (della probabilità totale):** la probabilità dell'unione di due eventi è uguale alla somma delle singole probabilità meno la probabilità della loro intersezione:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**Definizione di probabilità condizionata:**[1]

$$P(A|B) \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)} \ .$$

[1] La probabilità composta $P(A \cap B)$ può essere indicata anche semplicemente con $P(AB)$

**Definizione di indipendenza stocastica:** $A$ è stocasticamente indipendente da $B$ se:

$$P(A|B) = P(A) \ .$$

**Teorema (della probabilità composta):** la probabilità che un'estrazione appartenga contemporaneamente ad $A$ e a $B$ ($P(AB)$) è detta probabilità composta . Dalla definizione segue:

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B) \ .$$

**Condizione di indipendenza stocastica:** condizione necessaria e sufficiente perché due eventi $A$ e $B$ siano stocasticamente indipendenti è che la probabilità composta di $A$ e $B$ sia uguale al prodotto delle singole probabilità di $A$ e di $B$:

$$P(AB) = P(A)P(B) \ .$$

## Richiami di calcolo combinatorio

**Definizione: disposizioni semplici.** Dati $n$ elementi distinti e un numero $k \leq n$, si dicono disposizioni di classe $k$ tutti i gruppi che si possono formare con gli elementi dati in modo tale che:

- ogni gruppo ne contenga $k$ tutti distinti tra loro
- due gruppi qualunque differiscano tra loro per qualche elemento o per l'ordine con cui gli oggetti sono disposti.

Per le disposizioni semplici si ha:

$$\begin{aligned}
D_{n,1} &= n = \text{ disposizione di } n \text{ oggetti di classe } 1 \\
D_{n,2} &= n(n-1) \\
D_{n,3} &= n(n-1)(n-2) \\
&\vdots \\
D_{n,k} &= n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \tfrac{n!}{(n-k)!} \ .
\end{aligned}$$

**Definizione: disposizioni con ripetizione di classe $k$.** Si dicono disposizioni con ripetizione di classe $k$ tutti i gruppi che si possono formare con gli elementi dati in modo che ogni gruppo ne contenga $k$ (ma ogni elemento possa trovarsi ripetuto) e che ogni gruppo differisca dall'altro o per qualche elemento o per l'ordine con cui gli elementi sono disposti.

Per le disposizioni con ripetizione si ha:

$$D^R_{n,1} = n$$

$$D^R_{n,2} = n^2$$

$$\vdots$$

$$D^R_{n,k} = n^k$$

**Definizione: permutazioni.** Dati $n$ elementi distinti si dicono permutazioni i gruppi che si possono formare in modo che ogni gruppo contenga tutti gli $n$ elementi e differisca dagli altri solo per l'ordine degli elementi.

Praticamente una permutazione di $n$ elementi coincide con una disposizione di classe $n$ di $n$ oggetti:

$$P_n = D_{n,n} = n(n-1)\dots 2 \cdot 1 = n!$$

**Definizione: permutazioni di $n$ elementi non tutti distinti.**

- Se $m$ degli $n$ elementi sono uguali tra loro

$$P_n^{(m)} = \frac{n!}{m!} = \frac{P_n}{P_m}$$

- Se $m$ elementi sono uguali, $r$ elementi sono uguali ma diversi dai precedenti, $s$ elementi sono uguali ma diversi dai precedenti

$$P_n^{(m,r,s)} = \frac{n!}{m!r!s!}$$

**Definizione: combinazioni semplici.** Dati $n$ elementi distinti, si dicono combinazioni di classe $k \leq n$, oppure combinazioni a $k$ a $k$, tutti i gruppi che si possono formare con $k$ degli oggetti in modo che i gruppi differiscano tra loro per almeno un elemento (non importa l'ordine). Allora se si considerano le disposizioni di $n$ oggetti di classe $k$ e se si considerano identiche quelle che contengono gli stessi oggetti, si ottengono le combinazioni di classe $k$:

$$\begin{aligned} D_{n,k} &= C_{n,k}P_k \\ C_{n,k} &= \frac{D_{n,k}}{P_k} \\ C_{n,k} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \equiv \binom{n}{k} \end{aligned}$$

Il termine $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ è detto coefficiente binomiale; in particolare si ha:

$$\begin{aligned} \binom{n}{n} &= 1 \\ \binom{n}{1} &= n \\ \binom{n}{0} &\equiv 1 \end{aligned}$$

## Legge binomiale

Dato un insieme di $N$ oggetti, $a$ di tipo $A$ e $b$ $(= N - a)$ di tipo $B$, la probabilità che su $n$ estrazioni indipendenti (con reimmissione dopo ogni estrazione dell'oggetto) si ottenga $k$ volte un oggetto di tipo $A$ è data da:

$$P(n,k) = \binom{n}{k}\left(\frac{a}{N}\right)^k\left(\frac{N-a}{N}\right)^{n-k}.$$

## Legge ipergeometrica

Dato un insieme di $N$ oggetti, $a$ di tipo $A$ e $b$ $(= N - a)$ di tipo $B$, la probabilità che su $n$ estrazioni (senza reimmissione dopo ogni estrazione dell'oggetto) si ottenga $k$ volte un oggetto di tipo $A$ è data da:

$$P(n,k) = \frac{\binom{a}{k}\binom{N-a}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

## Teorema di Bayes

Sia $A_i (i = 1, \ldots, N)$ una qualunque partizione di $\Omega$. Sia $B \subset \Omega$. Il teorema di Bayes afferma che:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{N} P(B|A_i)P(A_i)} .$$

# Problemi risolti

## Esercizio 1.1

Calcolare la probabilità che un numero scelto a caso tra 0 e 9999 contenga almeno due volte la cifra 7.

**Svolgimento**
Si consideri il rapporto tra casi favorevoli e possibili.

Anziché calcolare la probabilità che un numero contenga almeno due volte la cifra 7, si consideri l'insieme complementare e si calcoli la probabilità che il numero contenga 0 oppure 1 volta il numero 7; si ha:

$$
\begin{aligned}
P(0 \text{ volte } 7) &= \frac{D^R_{9,4}}{D^R_{10,4}} = \left(\frac{9}{10}\right)^4 = 0.6561 \\
P(1 \text{ volta } 7) &= \frac{4 \cdot D^R_{9,3}}{D^R_{10,4}} = 4 \cdot \frac{9^3}{10^4} = 0.2916
\end{aligned}
$$

La probabilità richiesta è quindi:

$$P = 1 - P(0) - P(1) = 0.0523$$

## Esercizio 1.2

Dati 3 eventi $A, B, C$ si dimostri che:

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) + \\
&- P(BC) + P(ABC)
\end{aligned}
$$

**Svolgimento**
Si può indicare:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A' \cup C)$$

con $A' = A \cup B$.

Allora:

$$\begin{aligned}
&P(A \cup B \cup C) = \\
&= P(A') + P(C) - P(A' \cap C) = \\
&= P(A \cup B) + P(C) - P[(A \cup B) \cap C] = \\
&= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - [P(A \cap C) + P(B \cap C) + \\
&-P(A \cap B \cap C)] = \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)\ .
\end{aligned}$$

**Esercizio 1.3**

Un dado viene lanciato 3 volte. Qual è la probabilità di ottenere 4 almeno una volta? Quante volte deve essere lanciato il dado perché la probabilità di ottenere 4 almeno una volta sia maggiore o uguale al 50%?

**Svolgimento**

Sia $A = \{$ottenere 4 almeno una volta $\}$

Con tre lanci si ha:

$$P(A)_3 = 1 - \frac{5^3}{6^3}$$

dove $\frac{5^3}{6^3}$ è la probabilità di non ottenere mai 4 in 3 lanci.

Con $k$ lanci:

$$P(A)_k = 1 - (\frac{5}{6})^k\ ;$$

allora deve essere:

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k \geq 0.5$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^k \leq 0.5$$

$$k[\ln 5 - \ln 6] \leq -\ln 2$$

$$k \geq \frac{\ln 2}{\ln 6 - \ln 5} = 3.801784$$

e quindi: $k \geq 4$.

### Esercizio 1.4

Volendo impedire telefonate interurbane ai suoi dipendenti un capoufficio decide di metter un lucchetto sui dischi dei telefoni; decide però di metterlo sul 9, in modo da impedire solo che venga formato il numero zero. In questo modo è possibile effettuare telefonate urbane, anche se naturalmente può succedere che un numero urbano contenga uno 0, nel qual caso non è possibile comporlo. Considerando numeri di otto cifre (di cui la prima è diversa da 0), qual è la probabilità che un numero possa essere chiamato?

**Svolgimento**

Poiché la prima cifra è sicuramente diversa da 0, si considerano solo le rimanenti 7 cifre:

$$\begin{aligned} \text{casi possibili} &= D^R_{10,7} = 10^7 \\ \text{casi favorevoli} &= D^R_{9,7} = 9^7 \end{aligned}$$

$$P = \frac{9^7}{10^7} = \left(\frac{9}{10}\right)^7 = 0.4783$$

### Esercizio 1.5

Si ha un insieme di $n$ tessere in cui sono stampate le lettere dell'alfabeto, tutte diverse tra loro tranne la lettera $A$ che è presente su due tessere.

Estraendo a caso le tessere da un'urna qual è la probabilità che tra la prima e la seconda estrazione delle tessere con la lettera $A$ vengano estratte $k$ tessere con lettere diverse?

**Svolgimento**

Il numero di casi possibili è dato da tutte le possibili permutazioni di $n$ oggetti:

$$\text{casi possibili} = P_n = n!\ ;$$

il numero di casi favorevoli è dato da tutte le possibili permutazioni di $n-2$ oggetti moltiplicato per il numero di posizioni che possono occupare le tessere con lettera $A$ (separati da $k$ oggetti). Quindi:

$$\text{casi favorevoli} = P_{n-2} \cdot 2 \cdot (n-k-1) = (n-2)!\ 2(n-k-1)$$

La probabilità richiesta è quindi data da:

$$P = \frac{2(n-k-1)}{n(n-1)} \ .$$

## Esercizio 1.6

Dopo anni di assenza di contatti si vuole sentire il vecchio amico d'infanzia Paolo Rossi di cui si sa solo con certezza che abita a Milano.

Consultando l'elenco telefonico si trovano $n$ numeri telefonici corrispondenti al nome Paolo Rossi. Chiamando tutti questi numeri, qual è la probabilità di rintracciare l'amico al $k$-esimo tentativo?

**Svolgimento**

Il numero di casi possibili è dato da tutte le possibili permutazioni degli $n$ numeri telefonici:

$$\text{casi possibili} = P_n = n! \ .$$

Il numero di casi favorevoli è dato invece da tutte le possibili permutazioni degli $n-1$ numeri telefonici non corrispondenti all'amico (poiché il numero giusto deve essere estratto esattamente al $k$-esimo tentativo):

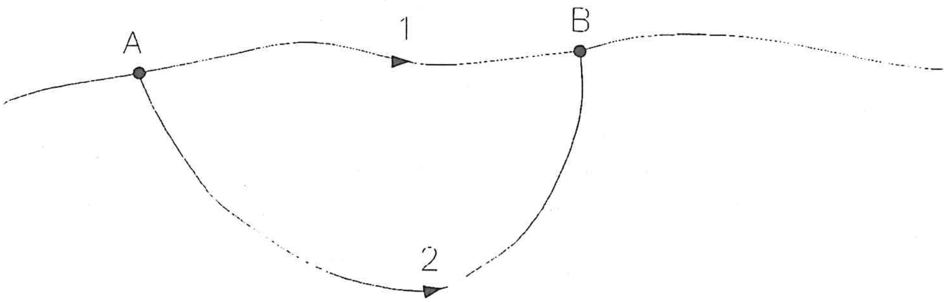
$$\text{casi favorevoli} = P_{n-1} = (n-1)! \ .$$

La probabilità richiesta è data quindi da:

$$P = \frac{P_{n-1}}{P_n} = \frac{1}{n} \ .$$

## Esercizio 1.7

A causa di lavori manutenzione sulla linea principale 1, i treni diretti da $A$ a $B$ possono essere istradati lungo la linea secondaria 2 (vedi figura). Sia $p(1) = 0.6$ la probabilità che un treno percorra la linea principale 1, sia $p(R|1) = 0.05$ la probabilità che un treno istradato lungo la linea principale 1 arrivi a $B$ in ritardo e sia $p(R) = 0.25$ la probabilità che un treno arrivi a $B$ in ritardo indipendentemente dal percorso.




Calcolare la probabilità che un treno istradato lungo la linea secondaria 2 arrivi in ritardo a $B$; calcolare la probabilità che un treno arrivato in ritardo a $B$ sia istradato lungo la linea secondaria 2.

**Svolgimento**
Dalla definizione di probabilità condizionata si ha che:

$$P(R) \quad = \quad P(R|1)P(1) + P(R|2)P(2)$$

quindi

$$P(R|2) = \frac{P(R) - P(R|1)P(1)}{P(2)} = 0.55 \; .$$

Per il teorema di Bayes:

$$P(2|R) = \frac{P(R|2)P(2)}{P(R)} = \frac{0.55 \cdot 0.4}{0.25} = 0.88 \; .$$

Senza calcolare $P(R|2)$ si poteva risolvere l'esercizio osservando che:

$$P(2|R) = 1 - P(1|R) = 1 - \frac{0.05 \cdot 0.6}{0.25} = 0.88 \; .$$

### Esercizio 1.8

Si hanno 2 scatole $A$ e $B$. $A$ contiene 7 palline bianche e 3 nere, $B$ 2 bianche e 8 nere. $A$ e $B$ non sono etichettate e sono indistinguibili dall'esterno. Per individuarle si sceglie una delle due e si estraggono da essa 3 palline. Se la maggioranza di esse è bianca si attribuisce alla scatola l'etichetta $A$, in caso contrario l'etichetta $B$. Qual è la probabilità di sbagliarsi?

**Svolgimento**

Si considerino gli eventi:

$$\begin{aligned} A &= \text{estrazione dalla scatola } A \\ B &= \text{estrazione dalla scatola } B \\ M &= \text{maggioranza delle palline estratte bianche} \\ m &= \text{minoranza delle palline estratte bianche} \end{aligned}$$

La probabilità di sbagliarsi è data da:

$$P(S) = P(B|M)P(M) + P(A|m)P(m) \ ,$$

cioè è la probabilità che la scatola sia $B$ anche se la maggioranza delle palline estratte è bianca e, viceversa, la probabilità che la scatola sia $A$ e la minoranza delle palline estratte sia bianca.

Per il teorema di Bayes:

$$P(B|M) = \frac{P(M|B)P(B)}{P(M|B)P(B) + P(M|A)P(A)}$$

quindi:

$$P(B|M)P(M) = P(M|B)P(B) = \frac{\binom{2}{2}\binom{8}{1}}{\binom{10}{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{30}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} P(A|M)P(m) &= P(m|A)P(A) = \left[\frac{\binom{7}{0}\binom{3}{3} + \binom{7}{1}\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}}\right] \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{11}{120} \end{aligned}$$

La probabilità di sbagliarsi è quindi:

$$P(S) = \frac{1}{30} + \frac{11}{120} = \frac{1}{8} \ .$$

## Esercizio 1.9

In un'urna vi sono 4 monete, di cui 2 sono regolari, hanno cioè una probabilità di mostrare testa pari a 0.5, mentre le altre 2 hanno probabilità rispettivamente pari a 0.8 e 0.4.

a) Qual è la probabilità che scegliendo a caso una moneta e lanciandola, il risultato sia testa?

b) Qual è la probabilità che la moneta lanciata, e che ha fornito il risultato testa, sia quella con probabilità 0.8?

## Svolgimento

a) La probabilità di estrarre ciascuna moneta è uguale ad $\frac{1}{4}$; la probabilità di ottenere testa estraendo e lanciando una moneta qualsiasi è data dalla somma della probabilità condizionate di ottenere testa dopo aver estratto ciascuna delle monete:

$$\begin{aligned}
P(T) &= P(T|1) + P(T|2) + P(T|3) + P(T|4) \\
P(T|1) &= P(T_1)P(1) = 0.5 \cdot 0.25 = 0.125 \\
P(T|2) &= P(T_2)P(2) = 0.5 \cdot 0.25 = 0.125 \\
P(T|3) &= P(T_3)P(3) = 0.8 \cdot 0.25 = 0.2 \\
P(T|4) &= P(T_4)P(4) = 0.4 \cdot 0.25 = 0.1 \\
P(T) &= 0.55
\end{aligned}$$

b) Per il Teorema di Bayes, la probabilità richiesta è data da

$$\begin{aligned}
P(3|T) &= \frac{P(T|3)P(3)}{P(T|4)P(4)+P(T|3)P(3)+P(T|2)P(2)+P(T|1)P(1)} = \\
&= \frac{0.8 \cdot 0.25}{0.55} = 0.\overline{36}\ .
\end{aligned}$$

## Esercizio 1.10

La trasmissione di un segnale può avvenire utilizzando 3 diversi canali $A, B, C$. I tre canali trasmettono il segnale correttamente con probabilità $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ rispettivamente. Il segnale viene assegnato ai tre canali in modo casuale con probabilità $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$. Avendo ricevuto un segnale errato, qual è la probabilità che non sia trasmesso da $A$?

**Svolgimento**

$$\begin{aligned} \text{Sia: } R \quad &= \text{segnale corretto} \\ R- \quad &= \text{segnale non corretto} \\ A- \quad &= \text{segnale non trasmesso da } A \end{aligned}$$

La probabilità di ottenere un segnale corretto è data da:

$$\begin{aligned} P(R) &= P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) + P(R|C)P(C) = \\ &\quad \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{36} \\ P(R-) &= 1 - P(R) = \frac{11}{36} \, . \end{aligned}$$

Da:

$$P(A-) = P(A - |R)P(R) + P(A - |R-)P(R-)$$

si ha

$$P(A - |R-) = \frac{P(A-) - P(A - |R)P(R)}{P(R-)} \, .$$

Applicando il Teorema di Bayes:

$$P(A - |R) = \frac{P(R|A-)P(A-)}{P(R)}$$

e, sostituendo nella relazione precedente, si ottiene:

$$P(A - |R-) = \frac{P(A-) - P(R|A-)P(A-)}{1 - P(R)} \, .$$

Per determinare $P(R|A-)$ si usi il teorema della probabilità totale:

$$P(R) = P(R|A)P(A) + P(R|A-)P(A-) \, ,$$

da cui:

$$P(R|A-)P(A-) = P(R) - P(R|A)P(A) \, .$$

Allora sostituendo:

$$\begin{aligned} P(A-|R-) &= \frac{1-P(A)-P(R)-P(R|A)P(A)}{1-P(R)} = \\ &= \frac{\frac{1}{3}-\frac{25}{36}-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{11}{36}} = \frac{5}{11} \end{aligned}$$

Un altro modo di svolgere l'esercizio è il seguente:

$$\begin{aligned} P(R-) &= P(R-|A)P(A)+P(R-|B)P(B)+ \\ &\quad +P(R-|C)P(C) = \tfrac{11}{36} \\ P(R-|A-) &= [P(R-)-P(R-|A)P(A)]/P(A-) \\ P(R-|A) &= 1-P(R|A) = 1-\tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

e quindi:

$$P(R-|A-) = \frac{\frac{11}{36}-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{11}{36}} = \frac{5}{11}\,.$$

### Esercizio 1.11

Uno strumento di laboratorio viene utilizzato per verificare il funzionamento di un circuito; è noto che il 70% dei circuiti verificati è funzionante. L'uscita dello strumento è + se lo strumento rileva il buon funzionamento del circuito, − in caso contrario. Sia $p \in [0,1]$ la probabilità che lo strumento fornisca risposte corrette, cioè:

$p$ = probabilità che lo strumento indichi + se il circuito funziona
= probabilità che lo strumento indichi − se lo strumento non funziona

Determinare quale valore $p$ deve assumere affinché la probabilità che il circuito funzioni, quando lo strumento fornisce la risposta +, sia 0.9.

**Svolgimento**
Si indichi:

$$\begin{aligned} C_+ &= \text{circuito funzionante} \\ C_- &= \text{circuito non funzionante} \\ S_+ &= \text{risposta + dello strumento} \\ S_- &= \text{risposta − dello strumento} \end{aligned}$$

Si sa che:

$$P(S_+|C_+) = P(S_-|C_-) = p \qquad P(S_+|C_-) = P(S_-|C_+) = 1 - p$$

e che: $P(C_+|S_+) = 0.90$.

Per il teorema di Bayes:

$$\begin{aligned} P(C_+|S_+) &= \frac{P(C_+S_+)}{P(S_+)} = \frac{P(C_+)P(S_+|C_+)}{P(C_+)P(S_+|C_+) + P(C_-)P(S_+|C_-)} \\ P(C_+) &= 0.7 \\ P(C_-) &= 0.3\ . \end{aligned}$$

Quindi:

$$0.9 = \frac{0.7 \cdot p}{0.7 \cdot p + (1 - p) \cdot 0.3}$$

da cui:

$$p = 0.7941\ .$$

# Esercizi

### Esercizio 1.12

Giocando 3 numeri al lotto qual è la probabilità di vincere il terno su una certa ruota?

[**R:** P=0.000085]

### Esercizio 1.13

Si hanno a disposizione le 21 lettere dell'alfabeto italiano. Estraendo 4 lettere a caso e mantenendo l'ordine di uscita qual è la probabilità di comporre esattamente la parola "mare"?

[**R:** P= $7 \times 10^{-6}$]

### Esercizio 1.14

Si hanno a disposizione le 21 lettere dell'alfabeto italiano. Estraendo 4 lettere a caso qual è la probabilità di ottenere un anagramma della parola "mare"? [**R:** P $= 1.67 \times 10^{-4}$]

### Esercizio 1.15

Da un'urna contenente $n$ palline, di cui $b$ sono bianche ed $r$ rosse, ne viene estratta una che viene messa da parte senza guardarla. Qual è la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca? [**R:** $\frac{b}{n}$]

### Esercizio 1.16

Qual è la probabilità che tra $\ell$ persone scelte a caso almeno due festeggino il compleanno nello stesso giorno? [Si osservi che è più semplice calcolare la probabilità che nessuno festeggi il compleanno nello stesso giorno (insieme complementare) e considerare poi $1 - p(A)$.]

[**R:** $p = 1 - \frac{365!}{(365-\ell)!365^{\ell}}$]

## Esercizio 1.17

Si calcoli qual è la probabilità di vincere alla roulette giocando i tre numeri 3, 13 e 22. Se si scopre che la roulette è truccata in modo che possano uscire solo i numeri dispari, qual è la probabilità di vincere in questo caso? [**R:** 0.0811 ; $0.\overline{1}$]

## Esercizio 1.18

In un cesto ci sono 15 palle da tennis, 9 delle quali sono nuove. Per il primo game vengono prese a caso tre palle e, a fine gioco, vengono rimesse nel cesto. Per il secondo game vengono di nuovo prese tre palle dal cesto. Qual è la probabilità che tutte le palle estratte la seconda volta siano nuove? [**R:** P=0.089264]

## Esercizio 1.19

Qual è la probabilità di ottenere almeno una volta 5 lanciando due volte un dado? [**R:** P=$1.8\overline{3}$]

## Esercizio 1.20

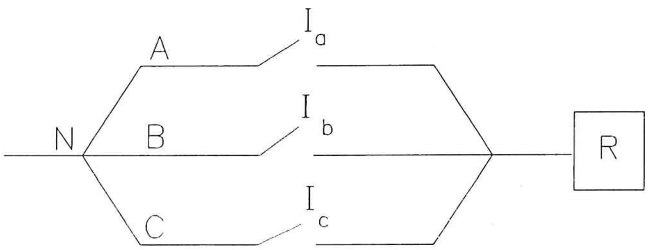
Due segnali di durata 1/4 vengono trasmessi durante l'intervallo di tempo (0,1). La coppia $(S, T)$ degli istanti di inizio è scelta a caso in modo che entrambi i segnali possano essere trasmessi per intero. Se i due segnali si sovrappongono, anche parzialmente, entrambi vengono distorti. Trovare la probabilità che i due segnali vengano ricevuti correttamente. [**R:** P=$0.\overline{4}$]

## Esercizio 1.21

Due persone $A$ e $B$ vorrebbero incontrarsi in un dato posto fra le 12.00 e le 13.00; la prima che arriva ($A$ o $B$) attende 20 minuti e poi se ne va. Che probabilità vi è che $A$ e $B$ si incontrino, se essi arrivano a caso nell'ora fra le 12.00 e le 13.00, sapendo che i tempi di arrivo sono indipendenti (cioè il tempo di arrivo di una persona non influenza l'arrivo dell'altra)? [**R:** P=5/9]

### Esercizio 1.22

Si consideri il circuito costruito come in figura




Il segnale arriva nel punto $N$ e può seguire il canale $A, B$ o $C$ rispettivamente con le probabilità $P(a) = 0.4$, $P(b) = 0.4$, $P(c) = 0.2$. Gli interruttori Ia, Ib, Ic hanno probabilità di essere chiusi pari a $P(Ia) = 0.1$ $P(Ib) = 0.4$ e $P(Ic) = 0.4$. Visti gli stati possibili del sistema, trovare le relative probabilità composte, nell'ipotesi che lo stato dell'interruttore (aperto o chiuso) e la scelta del canale ($A, B$ o $C$) siano tra loro indipendenti. Supposto che $R$ sia un rilevatore del segnale, in un certo esperimento, si trova il seguente esito

$$S = \{\text{il segnale non passa}\}$$

cioè il rilevatore $R$ non segnala nulla. Calcolare in questo caso la probabilità che il segnale sia passato lungo il canale $A$, lungo il canale $B$ e lungo $C$ (si usi il teorema di Bayes).

[**R:** $\mathrm{P}(A|S) = 0.5$ ; $\mathrm{P}(B|S) = 0.\overline{3}$; $\mathrm{P}(C|S) = 0.1\overline{6}$]

### Esercizio 1.23

Si considerano 5 urne dalle seguenti composizioni:

2 urne (composizione $A_1$) con 2 palline bianche e 3 nere
2 urne (composizione $A_2$) con 1 pallina bianca e 4 nere
1 urna (composizione $A_3$) con 4 palline bianche e 1 nera.

Si sceglie una pallina da un'urna a caso. La pallina estratta è bianca. Calcolare la probabilità che la pallina sia stata estratta dall'urna della terza composizione. [**R:** P=0.4]

### Esercizio 1.24

Una popolazione si compone per il 40% di persone con capelli chiari e per il 60% di persone con capelli scuri. Si sa che il 25% delle persone con i capelli chiari e il 7% di quelle brune hanno occhi azzurri. Qual è la probabilità che un individuo scelto a caso abbia occhi azzurri? Qual è la probabilità che una persona con occhi azzurri abbia capelli chiari?

[**R:** 0.142 ; 0.7042]

### Esercizio 1.25

Le probabilità che tre persone colpiscano un bersaglio con una freccia sono uguali a $4/5, 3/4, 2/3$. In un tiro simultaneo il bersaglio viene colpito da due frecce. Trovare la probabilità che il terzo tiratore abbia fallito. [**R:** 0.4615]

### Esercizio 1.26

In un opuscolo di 25 pagine, 15 pagine contengono errori di stampa. Viene fatta una ristampa riveduta, in cui le pagine che contengono errori sono 5. Si sceglie a caso un opuscolo da uno scaffale che contiene 20 opuscoli della prima edizione e 10 della ristampa. Si esaminano 3 pagine scelte a caso senza ripetizione e si trova che 2 di esse contengono errori di stampa.

Calcolare la probabilità che:

a) l'opuscolo scelto appartenga alla prima edizione;

b) l'opuscolo scelto appartenga alla ristampa.

[**R:** 0.4565 ; 0.0870]

### Esercizio 1.27

Tre macchine $A, B, C$ producono rispettivamente il 50%, il 30% e il 20% del numero totale dei pezzi prodotti in una fabbrica. Le percentuali dei prezzi difettosi prodotti da queste macchine sono rispettivamente il 3%, il 4% e il 5%.

a) Estraendo un pezzo a caso tra quelli prodotti determinare la probabilità che esso sia difettoso;

b) supponendo poi di estrarre a caso un pezzo e verificare che esso è difettoso, determinare la probabilità che esso sia stato estratto dalla macchina $A$.

[**R:** 0.037 ; 0.4054]

# 2 VARIABILI CASUALI E VARIABILI STATISTICHE A UNA DIMENSIONE

## Variabile casuale

**Definizione:** una variabile casuale a una dimensione è una distribuzione di probabilità il cui insieme di valori argomentali $S$ sia rappresentabile sulla retta reale e tale per cui sia definita la probabilità per ogni insieme $I(x_0)$:

$$I(x_0) = \{x \leq x_0\} \cap S$$

La variabile casuale può essere discreta o continua a seconda che $S$ sia a valori discreti o a valori continui:

$$\text{variabile casuale } X = \begin{cases} S \\ P(I(x_0)) & \forall x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**Definizione:** la funzione di distribuzione è la funzione $F(x_0)$ così definita:

$$F(x_0) = P(X \in I(x_0)) \ .$$

$F(x_0)$ è definita per ogni $x_0$ reale e risulta avere le seguenti proprietà:

$$0 \leq F(x_0) \leq 1$$

$$F(x_2) \geq F(x_1) \quad \text{per } x_2 \geq x_1$$

$$\lim_{x_0 \to +\infty} F(x_0) = 1$$

$$\lim_{x_0 \to -\infty} F(x_0) = 0$$

Se $X$ è una variabile casuale continua vale la relazione:

$$P(X \in [x_1, x_2]) = F(x_2) - F(x_1)$$

Se $X$ è una variabile casuale discreta $F(x_0) = \sum_{x_i \leq x_0} P(X = x_i)$ quindi $F(x)$ è una funzione a gradini, con discontinuità nei punti con probabilità diversa da 0.

In tal caso vale la relazione

$$P(X \in (x_1, x_2]) = F(x_2) - F(x_1)$$

mentre la relazione

$$P(X \in [x_1, x_2]) = F(x_2) - F(x_1)$$

vale solo se $x_1 \notin S$.

Per una variabile casuale discreta vale inoltre la relazione (condizione di normalizzazione)

$$\sum_{x_i \in S} P(x_i) = 1$$

**Definizione:** per una variabile casuale continua si definisce la funzione densità di probabilità :

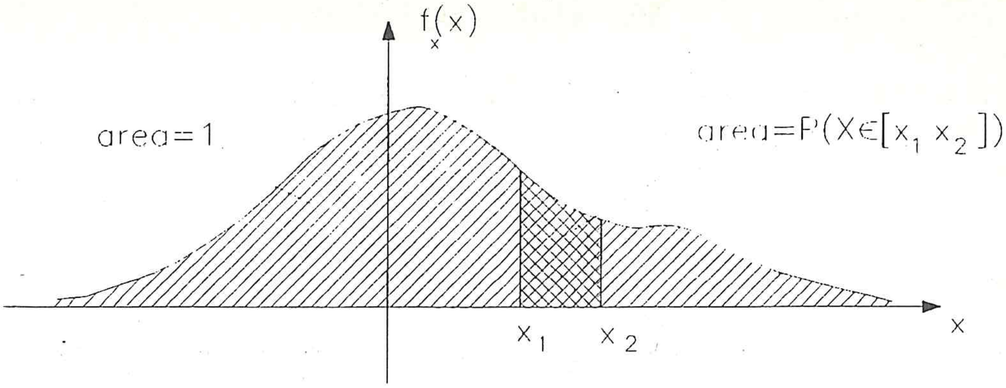
$$f_X(x) = \frac{dP}{|dx|} = \frac{dF}{dx}.$$

Quindi

$$F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_X(x)dx$$

La funzione $f_X(x)$ ha le seguenti proprietà:

$$f_X(x) \geq 0 \qquad \forall x$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1 \qquad \text{(condizione di normalizzazione)}$$
$$P(X \in [x_1, x_2]) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx$$




## Media e varianza

**Definizione:** si definiscono i due indici $\mu_X$ = media di $X$ (indice di posizione) e $\sigma_X^2$ = varianza di $X$ (indice di dispersione attorno alla media):

$$\mu_X = E_X\{X\} = \begin{cases} \sum_{x_i \in S} x_i P(x_i) & \text{(v.c. discreta)} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx & \text{(v.c. continua)} \end{cases}$$

$$\sigma_X^2 = E_X\{(X-\mu_X)^2\} = \begin{cases} \sum_{x_i \in S} (x_i - \mu_X)^2 P(x_i) & \text{(v.c. discreta)} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 f_X(x) dx & \text{(v.c. continua)} \end{cases}$$

Dalla proprietà di linearità della media si ricava la formula:

$$\sigma_X^2 = E_X\{X^2\} - \mu_X^2 = \begin{cases} \sum_i x_i^2 P(x_i) - \mu_X^2 & \text{(v.c. discreta)} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx - \mu_X^2 & \text{(v.c. continua)} \end{cases}$$

Si definisce inoltre lo scarto quadratico medio (s.q.m.) $\sigma_X$:

$$\sigma_X \equiv \sqrt{\sigma_X^2}$$

# Variabile statistica

**Definizione:** una variabile statistica è una tabella a due righe di valori numerici che descrive l'insieme dei risultati di un esperimento non deterministico e si può rappresentare nel modo seguente:

$$X = \begin{cases} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \text{(risultati)} \\ N_1 & N_2 & \dots & N_n & \text{(frequenze assolute)} \end{cases}$$

È possibile costruire una analogia formale con la variabile casuale discreta, definendo le frequenze relative:

$$f_i \equiv \frac{N_i}{N} \qquad \text{(frequenze relative)}$$

$$N = \sum_{i=1}^{n} N_i \quad \text{(numero totale di risultati dell'esperimento)}$$

La variabile statistica può quindi essere anche scritta come:

$$X = \begin{cases} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{cases}$$

con $f_i$ tali che $0 \leq f_i \leq 1$ e $\sum_{i=1}^{n} f_i = 1$, e quindi con comportamento analogo alle probabilità $P(x_i)$ di una variabile casuale discreta.

In analogia alla funzione di distribuzione $F(x)$ viene definita la funzione cumulativa di frequenza:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f_i = \sum_{x_i \leq x} \frac{N_i}{N}$$

che rappresenta la percentuale di elementi della popolazione il cui valore è minore o uguale a $x$.

Allo stesso modo, si possono introdurre media e varianza della variabile statistica, date da:

$$\mu_X = \sum_{i=1}^{N} x_i f_i$$

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu_X)^2 f_i = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 f_i - \mu_X^2$$

## Istogramma

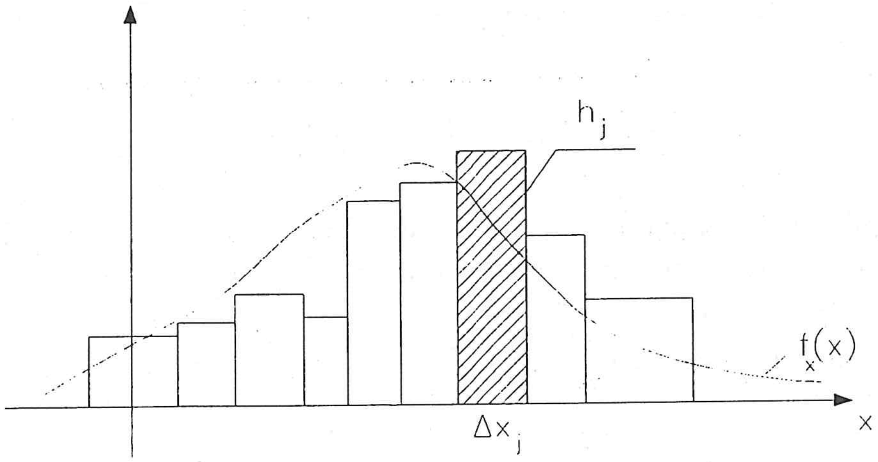
Per confrontare i risultati di un esperimento (organizzati in una variabile statistica) con una funzione densità di probabilità si costruisce l'istogramma suddividendo l'insieme dei risultati in intervalli disgiunti $\Delta x_j$ (non necessariamente di uguale ampiezza) e calcolando le frequenze relative degli intervalli:

$$f(\Delta x_j) = \frac{N(x_i \in \Delta x_j)}{N} \ .$$

Si calcolano quindi le ordinate

$$h(\Delta x_j) = \frac{f(\Delta x_j)}{\Delta x_j} = h_j$$

dell'istogramma, che risulta così essere una funzione a gradini confrontabile con una densità di probabilità :




$f(\Delta x_j) = h_j \cdot \Delta x_j$ = percentuale di elementi della popolazione totale che cadono in $\Delta x_j$;

$\int_{\Delta x_j} f(x)dx$ = area sottesa da $f(x)$ in $\Delta x_j$ = probabilità che $X$ abbia valori in $\Delta x_j$.

Vale la relazione:

$$\sum_j h_j \cdot \Delta x_j = 1 \ .$$

## Moda e mediana

Si noti che le definizioni che vengono riportate in questo e nei successivi paragrafi sono date per variabili casuali, essendo però immediata l'estensione al caso delle variabili statistiche applicando l'analogia già ricordata.

**Definizione:** la moda di una variabile casuale $X$ è il valore $x = \nu_0$ tale che $P(\nu_0) = \max_i(x_i)$ (variabile casuale discreta) o $f_X(x_0) \geq f_X(x)\ \forall x$ (variabile casuale continua).

Una distribuzione si dice unimodale se ha un solo massimo assoluto, plurimodale se ce n'è più di uno.

**Definizione:** la mediana di una variabile casuale $X$ è il valore $x = \mu_e$ per il quale si ha

$$P(X \leq \mu_e) = P(X \geq \mu_e) = \frac{1}{2} .$$

Nel caso di variabili casuali continue si calcola $\mu_e$ come quel valore tale che

$$\int_{-\infty}^{\mu_e} f_X(x)dx = \int_{\mu_e}^{+\infty} f_X(x)dx = \frac{1}{2} .$$

Nel caso di variabili casuali discrete, se esiste $x_i$ tale che $F(x_i) = 0.5$, $\mu_e$ è un qualsiasi valore dell'intervallo $[x_i, x_{i+1})$, altrimenti è il valore $x_i$ per cui $F(x_i) > 0.5$ per la prima volta.

Se la distribuzione è simmetrica rispetto ad un valore $x_0$, $x_0$ è media e mediana.

## Altri indici di dispersione

**Definizione:** deviazione media assoluta dalla media $\delta$:

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} |x_i - \mu_X| \; P(x_i) \qquad \text{(v.c. discreta)}$$

$$\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \mu_X| \; f_X(x)dx \qquad \text{(v.c. continua)}$$

**Definizione:** detti $|x_i - \mu_e|$ (o $|x - \mu_e|$) gli scarti assoluti rispetto alla mediana $\mu_e$, si definiscono i due indici "median absolute value" (m.a.v.) e "mean absolute value" (M.A.V.):

- m.a.v.: mediana degli scarti rispetto alla mediana, cioè mediana della variabile casuale $|X - \mu_e|$;
- M.A.V., $\delta_e$: media degli scarti rispetto alla mediana

$$\delta_e = \sum_{i=1}^{n} |x_i - \mu_e| \;\; P(x_i) \qquad \text{(v.c. discreta)}$$
$$\delta_e = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_i - \mu_e| \;\; f_X(x)dx \qquad \text{(v.c. continua)}$$

## Momenti semplici e centrali

**Definizione:** momenti semplici di ordine $n$

$$\mu_n = E_X\{X^n\} = \begin{cases} \sum_i x_i^n \; P(x_i) \\ \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x) \; dx \end{cases}$$

Si noti che: $\mu_1 = \mu_X$.

**Definizione:** momenti centrali di ordine $n$

$$\overline{\mu}_n = E_X\{(X - \mu_X)^n\} = \begin{cases} \sum_i (x_i - \mu_X)^n \; P(x_i) \\ \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^n \; f_X(x) \; dx \end{cases}$$

Si noti che: $\overline{\mu}_2 = \sigma_X^2$, $\overline{\mu}_1 = 0$.

Vale la seguente relazione tra momenti centrali e momenti semplici:

$$\overline{\mu}_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mu_{n-k}(-\mu_X)^k \; ;$$

per $n = 2$ si ha la nota formula $\sigma_X^2 = E\{X^2\} - \mu_X^2$.

Se una distribuzione è simmetrica attorno al valore medio, allora $\mu_1 = \mu_X$ e tutti i $\overline{\mu}_k$ con $k$ dispari sono nulli.

## Indici di skewness e curtosi

**Definizione:** indice di asimmetria o skewness

$$\beta = \frac{\overline{\mu}_3}{\sigma^3} \ .$$

Se $\beta \neq 0$ la distribuzione della variabile casuale $X$ è asimmetrica (ma $\beta = 0$ non è condizione sufficiente perché sia simmetrica).

**Definizione:** indice di curtosi

$$\gamma = \frac{\overline{\mu}_4}{\sigma^4} \ .$$

Per una distribuzione normale $\gamma = 3$. Una distribuzione con $\gamma < 3$ è detta platicurtica, con $\gamma > 3$ è detta leptocurtica.

## Funzione generatrice dei momenti

È una funzione che consente di calcolare tutti i momenti di una distribuzione. La funzione $g_X(t)$ è definita come:

$$g_X(t) = E_X\{e^{tX}\} = \begin{cases} \sum_i e^{tx_i} P(x_i) \\ \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x) dx \end{cases}$$

quando la serie o l'integrale sono convergenti.

La funzione $g_X(t)$ "genera" i momenti, nel senso che:

$$\frac{d^n}{dt^n} g_X(t) = E_X\{X^n e^{tX}\} \ ,$$

quindi

$$\frac{d^n}{dt^n} g_X(t)|_{t=0} = E_X\{X^n\} = \mu_n \ .$$

Se $g_X(t)$ esiste è analitica ed è quindi sviluppabile in serie di Taylor in $t = 0$:

$$g_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n G}{dt^n} \right|_{t=0} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mu_n}{n!} t^n$$

relazione che può essere utile per determinare tutti i momenti di una variabile casuale con una unica formula.

## Teorema di Tchebychef

Preso un qualunque numero $\lambda > 1$, per una variabile casuale $X$ qualsiasi vale la disuguaglianza

$$P(|X - \mu_X| \leq \lambda \sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2} \ .$$

## Trasformazioni di variabili casuali

Data una variabile casuale $X$ e una variabile casuale $Y$ legate dalla relazione $Y = g(X)$ si vuole ricavare la distribuzione di probabilità per $Y$ ($P(Y = y_j)$ o $f_Y(y)$) data quella di $X$. Ad un insieme $A_Y \subset S_Y$ corrisponde secondo $g(X)$ un insieme $A_X \subset S_X$. Si pone per definizione

$$P(Y \in A_Y) = P(X \in A_X) \ .$$

Nel caso di variabili casuali continue questa definizione porta alla formula

$$f_Y(y) = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

dove $x_i$ sono le radici della $y = g(x)$.

**Teorema (della media):** se due variabili casuali $X$ e $Y$ sono legate dalla relazione $Y = g(X)$, allora $\mu_Y$, se esiste, è data da

$$E_Y\{Y\} = E_X\{g(X)\}$$

ovvero

$$\mu_Y = \sum_{j=1}^{m} y_j P(y_j) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)P(x_i) \qquad \text{(v.c. discreta)}$$
$$\mu_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx \qquad \text{(v.c. continua)}$$

Se la variabile $X$ è ben concentrata intorno alla media $\mu_X$ e se in tale zona la funzione $Y = g(X)$ è lentamente variabile, allora vale la formula approssimata:

$$\mu_Y \cong g(\mu_X) \ .$$

Nel caso in cui $Y = g(X)$ sia una funzione lineare, $g(X) = aX + b$, la relazione vale in maniera esatta: $\mu_Y = g(\mu_X) = a\mu_X + b$.

Poiché dal teorema della media si ha che:

$$\sigma_Y^2 = E_Y\{(Y - \mu_Y)^2\} = E_X\{(g(X) - \mu_Y)^2\} \ ,$$

utilizzando la linearizzazione attorno a $\mu_X$ si arriva alla relazione:

$$\sigma_Y^2 \cong [g'(\mu_X)]^2 \cdot \sigma_X^2 \ ,$$

nota come legge di propagazione della varianza (o dell'errore).

Se $g(X) = aX + b$ la relazione diventa:

$$\sigma_Y^2 = [g'(\mu_X)]^2 \cdot \sigma_X^2 = a^2\sigma_X^2 \ .$$

# Problemi risolti

## Esercizio 2.1

Data la variabile casuale che rappresenta l'evento "lancio di un dado", ricavare la funzione di distribuzione corrispondente.

### Svolgimento

L'insieme dei possibili risultati dell'evento stocastico (e quindi l'insieme dei valori argomentali) è $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ipotizzando che il dado sia non truccato i sei risultati sono equiprobabili:

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x_i)$ | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |

La definizione di $F(x)$ è:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} P(x_i)$$

si ha per esempio:

$$P(X \leq 0.9) = F(0.9) = 0$$

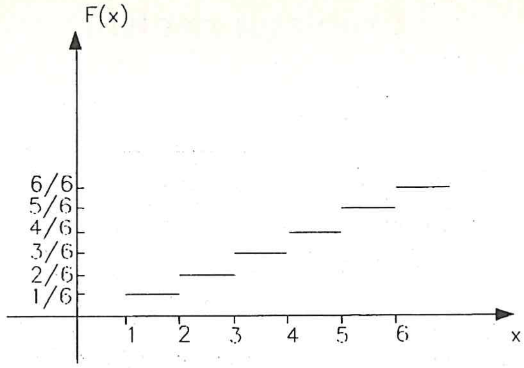
$$P(X \leq 1) = F(1) = \frac{1}{6}$$

$$P(X \leq 1.1) = F(1.1) = \frac{1}{6}$$

$$P(X \leq 2.1) = F(2.1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Nel caso in esame si ottiene:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1/6 & 1 \leq x < 2 \\ 1/3 & 2 \leq x < 3 \\ 1/2 & 3 \leq x < 4 \\ 2/3 & 4 \leq x < 5 \\ 5/6 & 5 \leq x < 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$$




Si ricorda che per una variabile casuale discreta vale:

$$P(a \leq X \leq b) \neq P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

quindi la $F(x)$ può essere utilizzata per calcolare la probabilità $P(X \in (a, b])$, per esempio:

$$P(2 < X \leq 4) = F(4) - F(2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

(in effetti la probabilità richiesta è uguale alla probabilità che esca 3 più la probabilità che esca 4, data da $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$).

**Esercizio 2.2**

Sia data una variabile statistica i cui valori sono raggruppati in classi

$$X = \begin{cases} 10-12 & 12-15 & 15-20 & 20-30 & 30-50 \\ 0.04 & 0.18 & 0.40 & 0.20 & 0.18 \end{cases}$$

Si riportino in una tabella le ampiezze degli intervalli, le densità di frequenza e le frequenze cumulate. Si disegni inoltre l'istogramma e la funzione cumulativa di frequenza.

**Svolgimento**

Dalle definizioni:

$f_i$ = percentuale di risultati in $[X_{i-1}, X_i]$ sul totale = frequenza relativa;

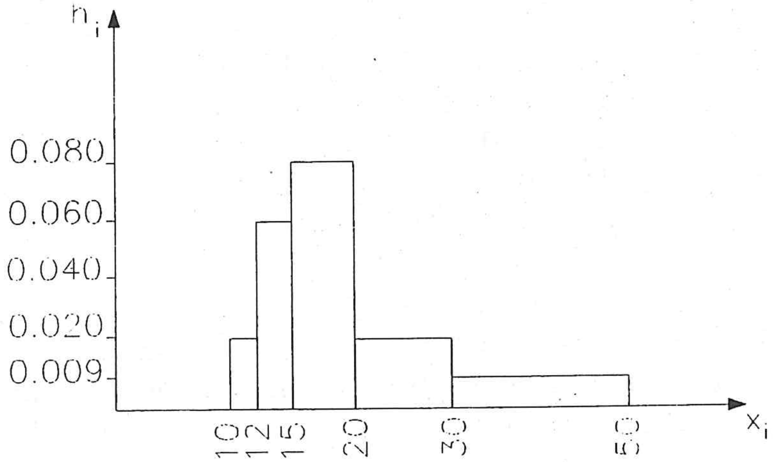
$\Delta X_i = X_{i-1} - X_i$ = ampiezza intervalli;

$h_i = \dfrac{f_i}{\Delta X_i}$ = densità di frequenza = ordinate dell'istogramma;

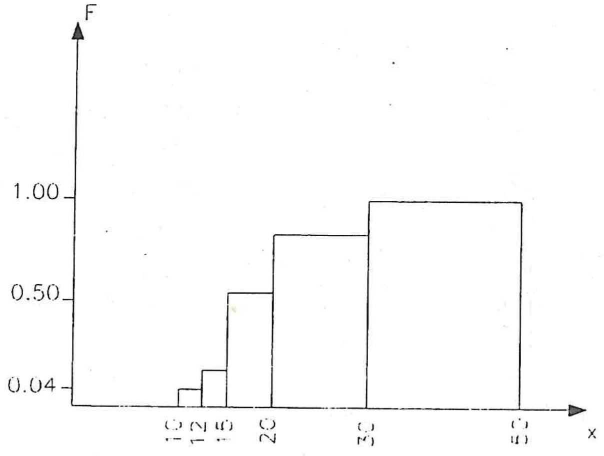
$F_i = \sum_{k=1}^{i} f_k$ = funzione cumulativa di frequenza.

| Intervalli $[X_{i-1}, X_i]$ | Frequenze relative $f_i$ | Ampiezze intervalli $\Delta X_i$ | Ordinate istogramma $h_i$ | Frequenze cumulate $F_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 10-12 | 0.04 | 2 | 0.020 | 0.04 |
| 12-15 | 0.18 | 3 | 0.060 | 0.22 |
| 15-20 | 0.40 | 5 | 0.080 | 0.62 |
| 20-30 | 0.20 | 10 | 0.020 | 0.82 |
| 30-50 | 0.18 | 20 | 0.009 | 1.00 |

Istogramma:



Funzione cumulativa di frequenza:




**Esercizio 2.3**

Siano dati i seguenti valori di una variabile statistica semplice:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| -0.38 | -0.03 | -0.28 | -0.31 | -0.24 |
| -2.61 | -0.50 | -0.95 | -0.19 | -1.22 |
| -1.20 | -1.81 | 0.01 | 0.40 | 1.09 |
| 1.09 | 0.73 | -0.56 | -1.35 | 0.00 |
| -0.87 | 1.11 | 0.15 | -0.35 | 1.42 |

Calcolare la media, la varianza e gli indici di asimmetria e curtosi. Tracciare l'istogramma della variabile statistica standardizzata (si considerino cinque classi di uguale ampiezza) e confrontarne le ordinate con i valori corrispondenti della variabile casuale normale standardizzata.

**Svolgimento**

Calcolo di media e varianza:

$$\begin{aligned}
N &= 25 \\
E\{X\} &= m_X = \frac{1}{N}\sum_i x_i = -0.2740 \\
s_X^2 &= \frac{1}{N}\sum_i (x_i - m_X)^2 = \frac{1}{N}\sum_i x_i^2 - m_X^2 = \\
&= 0.95753 - (0.274)^2 = 0.8825
\end{aligned}$$

Calcolo dell'indice di asimmetria (skewness), $\beta = \frac{\overline{\mu}_3}{\sigma^3(X)}$. Per una variabile statistica è:

$$\beta = \frac{\overline{m}_3}{s^3(X)}$$

Si determina il momento semplice di ordine 3:

$$\begin{aligned}
\overline{m}_3 &= E\{(X - m_X)^3\} = E\{X^3 - m_X^3 + 3Xm_X^2 - 3X^2m_X\} = \\
&= E\{X^3\} - m_X^3 + 3E\{X\}m_X^2 - 3E\{X^2\}m_X = \\
&= E\{X^3\} + 2m_X^3 - 3E\{X^2\}m_X
\end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned}
E\{X^2\} &= \frac{1}{N}\sum_i x_i^2 = 0.957530 \\
E\{X^3\} &= \frac{1}{N}\sum_i x_i^3 = -0.976915 \\
2m_X^3 &= -0.041142 \\
-3E\{X^2\} \cdot m_X &= 0.787090
\end{aligned}$$

quindi:

$$\overline{m}_3 = -0.230967$$
$$\beta = \frac{\overline{m}_3}{s_X^3} = -0.278598 \neq 0$$

La variabile statistica ha distribuzione asimmetrica.

Calcolo dell'indice di curtosi:

$$\gamma = \frac{\overline{m}_4}{s^4(X)}$$

$$\begin{aligned}
\overline{m}_4 &= E\{(X - m_X)^4\} = E\{((X - m_X)^2)^2\} = \\
&= E\{X^4 + m_X^4 + 4m_X^2X^2 + 2X^2m_X^2 - 4X^3m_X - 4Xm_X^3\} = \\
&= E\{X^4\} + m_X^4 + 6E\{X^2\}m_X^2 - 4E\{X^3\}m_X - 4E\{X\}m_X^3 = \\
&= 2.346487
\end{aligned}$$

Risulta quindi:

$$\gamma = 3.012928 > 3$$

La distribuzione è leptocurtica.

Per tracciare l'istogramma della variabile statistica standardizzata si calcolano le seguenti grandezze:

valore minimo = -2.61

valore massimo = 1.42

ampiezza classi $= \Delta x = \dfrac{2.61 + 1.42}{5} = 0.806$

estremi delle classi:

$$x_0 = -2.610$$
$$x_1 = -1.804$$
$$x_2 = -0.998$$
$$x_3 = -0.192$$
$$x_4 = 0.614$$
$$x_5 = 1.420$$

| Intervallo | Freq. ass. $N_i$ | Freq. rel. $f_i = N_i/N$ |
|---|---|---|
| $I_1 = [x_0, x_1]$ | 2 | 0.08 |
| $I_2 = [x_1, x_2]$ | 3 | 0.12 |
| $I_3 = [x_2, x_3]$ | 9 | 0.36 |
| $I_4 = [x_3, x_4]$ | 6 | 0.24 |
| $I_5 = [x_4, x_5]$ | 5 | 0.20 |

Per disegnare l'istogramma della variabile statistica standardizzata si determinano:

estremi delle classi standardizzati:

$$z_i = \frac{x_i - m_X}{s_X}$$

$$z_0 = -2.487$$
$$z_1 = -1.629$$

$$
\begin{aligned}
z_2 &= -0.771 \\
z_3 &= 0.087 \\
z_4 &= 0.945 \\
z_5 &= 1.803
\end{aligned}
$$

ampiezza delle classi standardizzate:

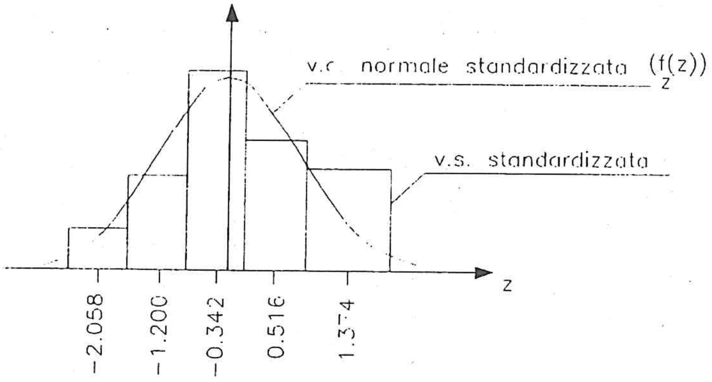
$$\Delta z = z_1 - z_0 = z_2 - z_1 = z_3 - z_2 = z_4 - z_3 = z_5 - z_4 = 0.858$$

ordinate dell'istogramma:

$$
\begin{aligned}
h(I_1) = f_1/\Delta z = 0.08/0.858 = 0.0932 \\
h(I_2) = f_2/\Delta z = 0.12/0.858 = 0.1398 \\
h(I_3) = f_3/\Delta z = 0.36/0.858 = 0.4195 \\
h(I_4) = f_4/\Delta z = 0.24/0.858 = 0.2797 \\
h(I_5) = f_5/\Delta z = 0.20/0.858 = 0.2331
\end{aligned}
$$

I valori corrispondenti di probabilità per la variabile casuale normale standardizzata si trovano nella tabella che dà le aree sottese dalla $f_Z(z)$:

$$
\begin{aligned}
P(I_1) &= P(Z < z_1) - P(Z < z_0) = P(Z < -z_0) - P(Z < -z_1) = \\
&= P(Z < 2.487) - P(Z < 1.629) = \\
&= 0.9936 - 0.9424 = 0.0452 \\
P(I_2) &= P(Z < 1.629) - P(Z < 0.771) = \\
&= 0.9484 - 0.7794 = 0.1690 \\
P(I_3) &= P(Z < 0.087) - P(Z < -0.771) = \\
&= 0.5359 - (0.5000 - 0.2794) = 0.3153 \\
P(I_4) &= P(Z < 0.945) - P(Z < 0.087) = \\
&= 0.8289 - 0.5359 = 0.2930 \\
P(I_5) &= P(Z < 1.803) - P(Z < 0.945) = \\
&= 0.9641 - 0.8289 = 0.1352
\end{aligned}
$$




**Esercizio 2.4**

Sia data la variabile casuale con densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} Ae^{-x} & 1 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Determinare il valore della costante $A$, la media, la funzione di distribuzione e le probabilità

$$P(2 \leq X \leq 3) \text{ e } P(3 \leq X \leq 5)\ .$$

**Svolgimento**

Per ricavare il valore di $A$ si usa la condizione di normalizzazione:

$$\int_1^4 Ae^{-x}dx = 1$$

$$A\int_1^4 e^{-x}dx = A[-e^{-x}]_1^4 = A[-e^{-4} + e^{-1}] = A[\frac{1}{e} - \frac{1}{e^4}] = 1$$

quindi:

$$A = \frac{1}{\frac{1}{e} - \frac{1}{e^4}} = \frac{1}{\frac{e^3-1}{e^4}} = \frac{e^4}{e^3 - 1}$$

Media (integrando per parti):

$$\begin{aligned}
\mu_X &= A\int_1^4 xe^{-x}dx = A\left\{[-xe^{-x}]_1^4 - \int_1^4 -e^{-x}dx\right\} = \\
&= A\left\{[-xe^{-x}]_1^4 + \int_1^4 e^{-x}dx\right\} = \\
&= A[-xe^{-x} - e^{-x}]_1^4 = \frac{e^4}{e^3-1}[-4e^{-4} - e^{-4} + e^{-1} + e^{-1}] = \\
&= \frac{e^4}{e^3-1}\left[\frac{2}{e} - \frac{5}{e^4}\right] = \\
&= \frac{2e^3-5}{e^3-1}
\end{aligned}$$

Funzione di distribuzione:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_1^x f_X(x)dx = \\
&= A\int_1^x e^{-x}dx = A[-e^{-x}]_1^x = \frac{e^4}{e^3-1}[-e^{-x} + e^{-1}] = \\
&= \frac{e^4}{e^3-1}\left[\frac{1}{e} - \frac{1}{e^x}\right] = \frac{e^4}{e^3-1}\left[\frac{e^{(x-1)}-1}{e^x}\right] = \\
&= \frac{e^3}{e^3-1}\left(\frac{e^{x-1}-1}{e^{x-1}}\right)
\end{aligned}$$

Le probabilità richieste sono date da:

$$P(2 \leq X \leq 3) = \int_2^3 f_X(x)dx = A\int_2^3 e^{-x}dx$$
$$P(3 \leq X \leq 5) = \int_3^5 f_X(x)dx = A\int_3^4 e^{-x}dx$$

Tuttavia, avendo già determinato $F(x)$, si può effettuare il calcolo nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
P(2 \leq X \leq 3) &= F(3) - F(2) = \frac{e^3}{e^3-1}\left(\frac{e^2-1}{e^2}\right) - \frac{e^3}{e^3-1}\left(\frac{e-1}{e}\right) = \\
&= \frac{e(e+1)}{(e^2+1+e)} - \frac{e^2}{(e^2+1+e)} = \\
&= \frac{e^2+e-e^2}{e^2+1+e} = \frac{e}{e^2+1+e}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(3 \le X \le 5) &= F(5) - F(3) = \\
&= 1 - \frac{e^3}{e^3 - 1}\left(\frac{e^2 - 1}{e^2}\right) = \\
&= 1 - \frac{e(e+1)}{(e^2 + e + 1)} = \\
&= \frac{e^2 + e + 1 - e^2 - e}{e^2 + e + 1} = \frac{1}{e^2 + e + 1}
\end{aligned}
$$

**Esercizio 2.5**

Data la funzione

$$
f_X(x) = \begin{cases} A \sin x & 0 \le x \le \pi \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}
$$

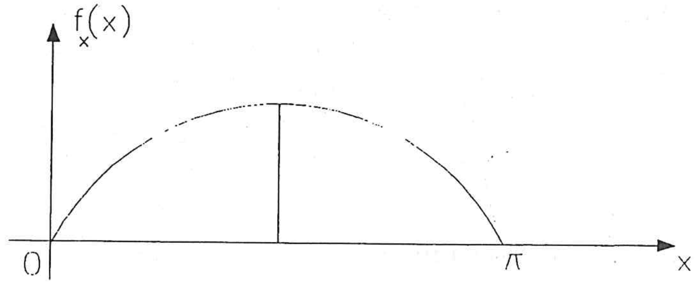
determinare $A$ in modo che $f_X(x)$ possa essere una densità di probabilità e calcolare la media di $X$.

**Svolgimento**

Dalla condizione di normalizzazione: $\int_o^\pi A \sin x dx = 1$ si ottiene:

$$
A \int_o^\pi \sin x dx = A[-\cos x]_0^\pi = 2A = 1
$$

$$
A = \frac{1}{2}
$$




La media di $X$ può essere determinata notando che $f_X(x)$ è simmetrica rispetto a $x = \frac{\pi}{2}$, quindi $\mu_X = \frac{\pi}{2}$.

Oppure si calcola $\mu_X$ dalla definizione:

$$
\mu_X = \int_0^\pi x \cdot \frac{1}{2} \sin x dx = \frac{1}{2}[-x \cos x]_0^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos x \; dx = \frac{\pi}{2}
$$

**Esercizio 2.6**
Sia data la variabile casuale con funzione densità di probabilità :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Ricavare la media, la varianza, la mediana e gli indici di skewness e di curtosi.

**Svolgimento**
Media $\mu$:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x\alpha e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$$

Per la varianza $\sigma^2$ vale la relazione:

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}_2 &= \sigma^2 = \mu_2 - \mu^2 \\
\mu_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \alpha \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x} dx = \frac{2}{\alpha^2} \\
\sigma^2 &= \frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}
\end{aligned}$$

Mediana $\mu_e$:

$$F(\mu_e) = \frac{1}{2} = \int_{-\infty}^{\mu_e} f(x) dx = \int_0^{\mu_e} \alpha e^{-\alpha x} dx = 1 - e^{-\alpha \mu_e} .$$

Quindi si ha:

$$\mu_e = \frac{\log 2}{\alpha}$$

Indice di skewness (o asimmetria):

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{\overline{\mu}_3}{\sigma^3} \\
\overline{\mu}_3 &= E\{(X - \mu)^3\} = E\{X^3\} - 3\mu E\{X^2\} + 3\mu^2 E\{X\} - \mu^3 = \\
&= E\{X^3\} - \frac{3}{\alpha} \cdot \frac{2}{\alpha^2} + \frac{3}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\alpha} - \frac{3}{\alpha^3} = E\{X^3\} - \frac{4}{\alpha^3} \\
E\{X^3\} &= \mu_3 = \alpha \int_0^{+\infty} x^3 e^{-\alpha x} dx = \frac{6}{\alpha^3} \\
\overline{\mu}_3 &= \frac{2}{\alpha^3} \\
\beta &= \frac{\overline{\mu}_3}{\sigma^3} = \frac{2/\alpha^3}{1/\alpha^3} = 2
\end{aligned}$$

Poiché $\beta \neq 0, f_X(x)$ è asimmetrica.

Indice di curtosi $\gamma$:

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{\overline{\mu}_4}{(\overline{\mu}_2)^2} \\
\overline{\mu}_4 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} \mu_{4-k}(-\mu)^k = \\
&= \frac{4!}{0!\,4!}\mu_4 + \frac{4!}{1!\,3!}\mu_3(-\mu) + \frac{4!}{2!\,2!}\mu_2(-\mu)^2 + \\
&\quad + \frac{4!}{3!\,1!}\mu_1(-\mu)^3 + \frac{4!}{4!\,0!}\mu_0(-\mu)^4 = \\
&= \mu_4 - 4\mu_3\mu + 6\mu_2\mu^2 - 4\mu_1\mu^3 + \mu^4 = \\
&= \mu_4 - \frac{24}{\alpha^4} + \frac{12}{\alpha^4} - \frac{4}{\alpha^4} + \frac{1}{\alpha^4} = \mu_4 - \frac{15}{\alpha^4} \\
\mu_4 &= \int_0^{+\infty} \alpha x^4 e^{-\alpha x} dx = \alpha \int_0^{+\infty} x^4 e^{-\alpha x} dx = \frac{24}{\alpha^4} \\
\overline{\mu}_4 &= \frac{24}{\alpha^4} - \frac{15}{\alpha^4} = \frac{9}{\alpha^4} \\
\gamma &= \frac{\overline{\mu}_4}{(\overline{\mu}_2)^2} = \frac{9}{\alpha^4}\alpha^4 = 9
\end{aligned}$$

Poiché $\gamma > 3, f_X(x)$ è leptocurtica.

**Esercizio 2.7**

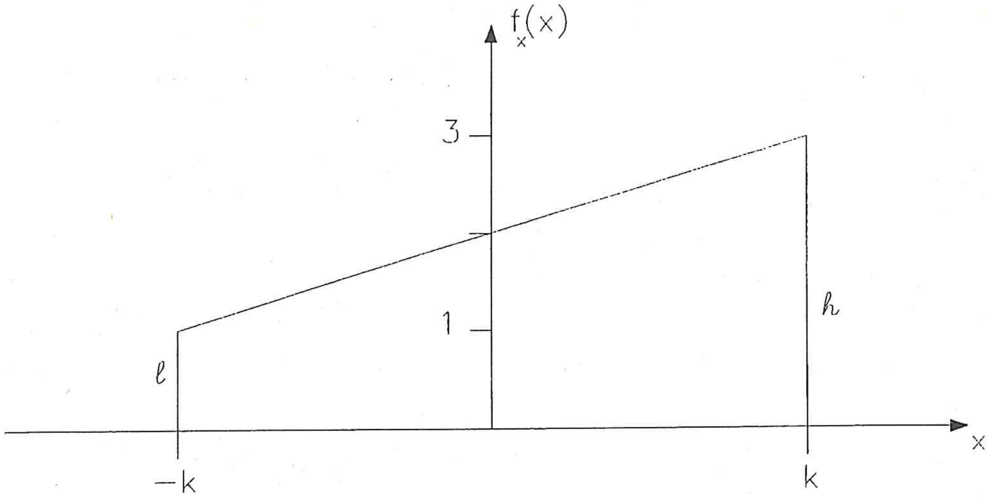
Sia data la funzione:

$$f_X(x) = ax + b$$

definita sull'intervallo simmetrico rispetto all'origine $[-k, k]$.

Inoltre siano noti i suoi valori nei punti estremi dell'intervallo

$$\ell = f(-k) = 1 \; ;$$
$$h = f(k) = 3 \; .$$




a) Determinare i parametri $a$ e $b$ in funzione di $k$;

b) calcolare il valore di $k$ affinché tale funzione rappresenti una densità di probabilità sull'intervallo $[-k, k]$;

c) valutare la media e lo s.q.m. della variabile casuale ad essa associata;

d) calcolare la moda ($\nu_0$) e la mediana ($\mu_e$).

**Svolgimento**

a) Per trovare $a(k)$ e $b(k)$ si impone il passaggio della retta $y = ax + b$ per i punti $(-k, 1), (k, 3)$:

$$\begin{cases} f(-k) = 1 \\ f(k) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a(-k) + b = 1 \\ ak + b = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 2 \\ a = \dfrac{1}{k} \end{cases}$$

b) Per calcolare $k$ si utilizza la condizione di normalizzazione:

$$\frac{(h + l) \cdot 2k}{2} = 1$$

Quindi $k = 1/4$ e di conseguenza $a = 4$.

c) Calcolo di $\mu_X$ e $\sigma_X$:

$$\mu_X = \int_{-k}^{k} x \cdot (4x + 2)dx = \left[4\frac{x^3}{3} + x^2\right]_{-1/4}^{1/4} = \frac{1}{24}$$

$$
\begin{aligned}
\mu_2 &= \int_{-k}^{k} x^2(4x+2)dx = \left[4\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3}\right]_{-1/4}^{1/4} = \frac{1}{48} \\
\sigma_X^2 &= \mu_2 - \mu_X^2 = 0.0191 \\
\sigma_X &= 0.1382
\end{aligned}
$$

d) Per il calcolo della moda $\nu_0$ si deve notare che in questo caso le condizioni

$$
\begin{cases} f'(\nu_0) = 0 \\ f''(\nu_0) < 0 \end{cases}
$$

non sono mai verificate, ma per $x = \frac{1}{4}$ $f_X(x)$ raggiunge il suo valore massimo.

In effetti in tale punto $f_X(x)$ non è derivabile, risulta invece soddisfatta la condizione $f_X(1/4) > f_X(x)$, $\forall x$.

Quindi $\nu_0 = 1/4$.

Per il calcolo della mediana $\mu_e$ impongo la condizione:

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\mu_e} f_X(x)dx = 1/2 \\
&\int_{-1/4}^{\mu_e} (4x+2)dx = 2\mu_e^2 + 2\mu_e - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = 2\mu_e^2 + 2\mu_e + \frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

quindi deve essere:

$$
\begin{aligned}
&2\mu_e^2 + 2\mu_e + \frac{3}{8} = \frac{1}{2} \\
&\mu_e^2 + \mu_e - \frac{1}{16} = 0 \\
&\mu_e = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 1/4}}{2} = \frac{-1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}}{2} = \begin{cases} -1.059 \\ +0.059 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Il valore negativo è al di fuori dell'intervallo in cui $f_X(x)$ è diversa da zero, mentre l'altro è all'interno di tale intervallo, dunque $\mu_e = 0.059$.

### Esercizio 2.8

Data la variabile casuale discreta $X$

$$
X = \begin{cases} 0 & 1 & 3 & 11 \\ 0.10 & 0.35 & 0.30 & 0.25 \end{cases}
$$

calcolare $\mu_X, \mu_e, \nu_0$ e gli indici $\delta$ (deviazione media assoluta dalla media) $\delta_e$ (M.A.V.) e m.a.v.

**Svolgimento**
Calcolo della media:

$$\mu_X = 0 \cdot 0.10 + 1 \cdot 0.35 + 3 \cdot 0.30 + 11 \cdot 0.25 = 4$$

Calcolo della mediana: in questo caso vale la definizione secondo la quale $\mu_e$ è il primo valore tale che $F(\mu_e) > 0.5$ quindi $\mu_e = 3$.

Calcolo della moda:

essendo $P(X = 1) > P(X) \quad \forall x \neq 1$, si ha $\nu_0 = 1$.

Calcolo di $\delta$:

$$\delta = \sum_i |x_i - \mu_X| \, p_i = 4 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.35 + 1 \cdot 0.30 + 7 \cdot 0.25 = 3.5$$

Calcolo di $\delta_e$ (M.A.V):

$$\delta_e = \sum_i |x_i - \mu_e| \, p_i = 3 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.35 + 0 \cdot 0.30 + 8 \cdot 0.25 = 3$$

Per il calcolo del m.a.v. si determina la distribuzione dei valori

$|x_i - \mu_e| = S_e$:

$$S_e = \begin{cases} 0 & 2 & 3 & 8 \\ 0.30 & 0.35 & 0.10 & 0.25 \end{cases}$$

La mediana di tale distribuzione è il primo valore per cui $F(S_e) > 0.5$, quindi è m.a.v. $= 2$.

### Esercizio 2.9

Data la variabile casuale

$$X = \begin{cases} -2 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{cases}$$

si consideri la nuova variabile casuale

$$Y = 1 - X^2$$

a) Si costruisca la distribuzione di probabilità di $Y$;

b) si calcolino $\mu_X$ e $\sigma_X^2$;

c) si calcolino $\mu_Y, \sigma_Y^2$ con la distribuzione di $Y$ e si verifichi il teorema della media;

d) si calcoli $\mu_Y$ con la formula approssimata (linearizzazione) e si dica perché in questo caso non funziona (si consiglia di tracciare il grafico con i valori argomentali di $Y$ e $X$).

**Svolgimento**

a) Si determinano i valori di $Y$ in funzione di $X$:

| $X$ | $Y$ |
|---|---|
| -2 | -3 |
| -1 | 0 |
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Quindi la distribuzione di probabilità di $Y$ è:

$$Y = \begin{cases} -3 & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right) & \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} -3 & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{cases}$$

b) Calcolo di media e varianza di $X$:

$$\begin{aligned} \mu_X &= -2 \cdot \frac{1}{6} - 1 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} \\ \sigma_X^2 &= E\{X^2\} - \mu_X^2 = 4 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{6}\right)^2 = 1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{41}{36} \end{aligned}$$

c) Calcolo di media e varianza di $Y$ utilizzando la distribuzione di $Y$:

$$\begin{aligned} \mu_Y &= -\frac{3}{6} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} \\ \sigma_Y^2 &= E_Y\{Y^2\} - \frac{1}{36} = \frac{9}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{36} = \frac{65}{36} \end{aligned}$$

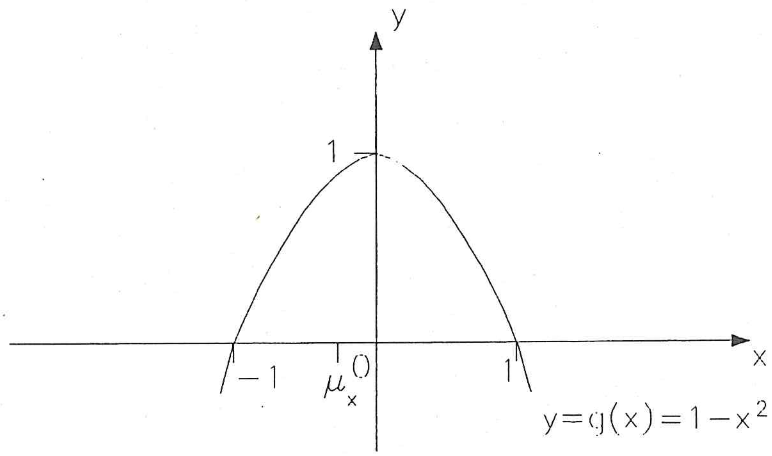
Utilizzando il teorema della media si ha la verifica richiesta:

$$\begin{aligned}
\mu_Y &= E_X\{g(X)\} = (1-4)\cdot\frac{1}{6} + (1-1)\cdot\frac{1}{6} + (1-0)\cdot\frac{1}{3} + (1-1)\frac{1}{3} = \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}\sigma_Y^2 = E_X\{g^2(X)\} - \frac{1}{36} = \\
&= (1-4)^2\cdot\frac{1}{6} + (1-1)^2\cdot\frac{1}{6} + (1-0)^2\cdot\frac{1}{3} + (1-1)^2\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{36} = \\
&= \frac{9}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{36} = \frac{65}{36}
\end{aligned}$$

d) Calcolo di $\mu_Y$ utilizzando la formula approssimata:

$$\mu_Y \cong g(\mu_X) = 1 - \mu_X^2 = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

Il valore così calcolato non corrisponde a quello calcolato al punto c).




Infatti, come si vede dalla figura, la funzione $g(X)$ non è lentamente variabile nell'intervallo di definizione della $X$, quindi non esistono le condizioni per linearizzare efficacemente attorno a $\mu_X$.

### Esercizio 2.10

Sia data la variabile casuale $X$ distribuita normalmente

$$X \sim \mathcal{N}(1; 0.01)$$

e la variabile casuale

$$Y = 10X - 4$$

a) Trovare $\mu_Y, \sigma_Y^2$;

b) trovare la densità di probabilità di $Y$;

c) calcolare $P(5 \leq Y \leq 8)$.

**Svolgimento**

a) Calcolo di media e varianza di $Y$:

$$\mu_Y = g(\mu_X) = 10 \cdot 1 - 4 = 6$$

$$\sigma_Y^2 = [g'(\mu_X)]^2 \cdot \sigma_X^2 = [10]^2 \cdot 0.01 = 1$$

le relazioni sono esatte perché $g(X)$ è lineare.

b) Una trasformazione lineare trasforma una normale in un'altra normale, quindi $Y \sim \mathcal{N}(6; 1)$.

Oppure si può procedere nel modo seguente:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|g'(x)|}$$

dove:

$$x = \frac{y+4}{10}$$

$$g'(x) = 10$$

$$f_X(x) = \frac{1}{0.1\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-1)^2}{2 \cdot 0.01}}$$

Quindi si ha:

$$f_Y(y) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{0.1\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(\frac{y+4}{10}-1)^2}{0.02}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(y-6)^2}{2}}$$

c) Per calcolare $P(5 \leq Y \leq 8)$, si noti che

$$P(5 \leq Y \leq 8) = P(-1 \leq Z \leq 2)$$

avendo standardizzato: $Z = \dfrac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} = \dfrac{Y-6}{1}$

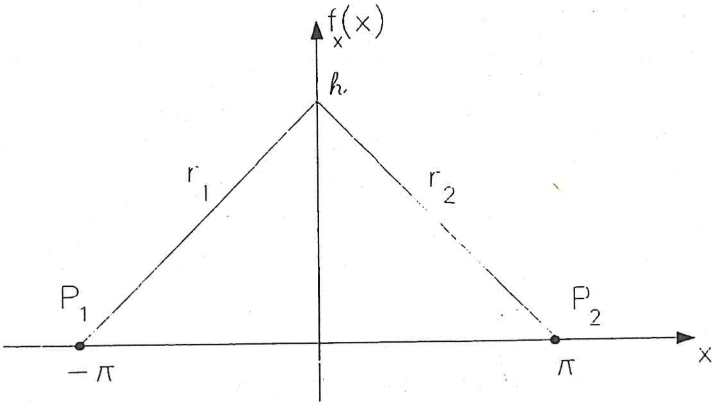
$$\begin{cases} Y_1 = 5 \\ Y_2 = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Z_1 = \dfrac{5-6}{1} = -1 \\ Z_2 = \dfrac{8-6}{1} = 2 \end{cases}$$

Dalle tabelle si ottengono le $P(0 \leq Z \leq \overline{Z})$ e si ricava la probabilità richiesta scomponendo nel modo seguente:

$$\begin{aligned} P(-1 \leq Z \leq 2) &= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) = \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 2) = \\ &= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185 \end{aligned}$$

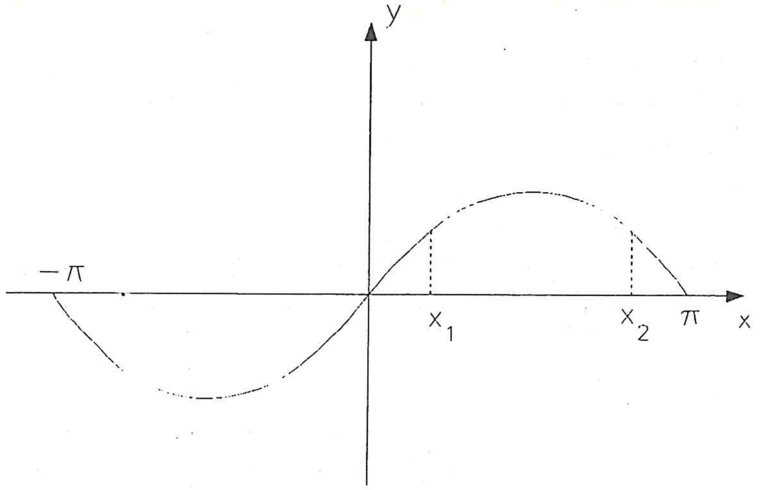
**Esercizio 2.11**

Sia data una variabile casuale $X$ con distribuzione triangolare su $[-\pi, \pi]$, simmetrica rispetto a zero:




Si consideri la variabile casuale $Y$

$$Y = \sin X \qquad (-\pi \leq X \leq \pi)$$




a) Si diano le densità di probabilità di $X$ e di $Y$;

b) si calcoli in modo esatto la media $\mu_Y$ e la varianza $\sigma_Y^2$;

c) si calcoli in modo approssimato la varianza di $Y$, $\tilde{\sigma}_Y^2$, e la si confronti con $\sigma_Y^2$.

**Svolgimento**

a) Determinazione della densità di probabilità di $X$:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq -\pi) \\ r_1 & (-\pi \leq x \leq 0) \\ r_2 & (0 \leq x \leq \pi) \\ 0 & (x \geq \pi) \end{cases}$$

dove $r_1$ ed $r_2$ sono le rette passanti per $(0, h)$ e i punti $P_1 = (-\pi, 0)$, $P_2 = (+\pi, 0)$ rispettivamente. Per determinare $r_1$ ed $r_2$ si impone quindi il passaggio per questi punti:

$$r_1 : \qquad y = m_1 x + q_1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} h = q_1 \\ 0 = m_1(-\pi) + q_1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} q_1 = h \\ m_1 = \frac{h}{\pi} \end{cases}$$

$$r_2 : \qquad y = m_2 x + q_2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} h = q_2 \\ 0 = m_2(\pi) + q_2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} q_2 = h \\ m_2 = -\frac{h}{\pi} \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Equazione di} & r_1: \quad y = \frac{h}{\pi}\left(x + \frac{1}{\pi}\right) \\ \text{Equazione di} & r_2: \quad y = \frac{h}{\pi}\left(-x + \frac{1}{\pi}\right) \end{array}$$

Poiché inoltre l'area $A$ sottesa dalla $f_X(x)$ deve essere uguale ad 1:

$$A = \frac{2\pi \cdot h}{2} \equiv 1$$

segue che $h = 1/\pi$.

Si può quindi scrivere:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2}(\pi - |x|) & -\pi < x < \pi \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Determinazione della densità di probabilità di $Y$:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|} = \\ &= \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|} \end{aligned}$$

poiché per ogni $y$, $y = g(x)$ ha due radici.

Si ragioni ora sulla simmetria della $f_X(x)$ e sulla antisimmetria di $y = g(x)$, il che permette di dire che se $X$ è simmetrica rispetto all'origine allora anche $Y$ lo è, cioè $Y$ può essere studiata solo per $y > 0$.

Per $y > 0$, $x > 0$ e le due radici di $g(X)$ sono:

$$\begin{aligned} x_1 &= \arcsin y \\ x_2 &= \pi - \arcsin y \end{aligned}$$

quindi:

$$\begin{aligned} & y = g(x) = \sin x \\ & g'(x) = \cos x \\ & g'(x_1) = g'(x_2) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)} = \sqrt{1 - y^2} \end{aligned}$$

In definitiva si ha:

$$f_Y(y) = \frac{\pi - x_1}{\pi^2 |\cos x_1|} + \frac{\pi - x_2}{\pi^2 |\cos x_2|} = \frac{\pi - \arcsin y + \pi - \pi + \arcsin y}{\pi^2 \sqrt{1-y^2}}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} & -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

b) Calcolo di media e varianza di $Y$:

$\mu_Y = 0$ per la simmetria di $f_Y(y)$ attorno a $y = 0$

$$\sigma_Y^2 = \int_{-1}^{1} \frac{y^2}{\pi\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^2 t \cos t}{\cos t}\, dt = 1 - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \; dt = \frac{1}{2}$$

(con la sostituzione $y = \sin t$).

c) Calcolo della varianza di $Y$ in modo approssimato:

$$\tilde{\sigma}_Y^2 \cong [g'(\mu_X)]^2 \cdot \sigma_X^2 = [g'(0)]^2 \cdot \sigma_X^2 = \sigma_X^2$$

Calcolo di $\sigma_X^2$:

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} x^2(\pi - |x|)dx = \frac{2}{\pi^2}\int_{0}^{\pi} x^2(\pi - x)dx = \\ &= \frac{2}{\pi^2}\left[\frac{x^3}{3}\pi - \frac{x^4}{4}\right]_0^{\pi} == \frac{\pi^2}{6} = 1.644934 \\ \tilde{\sigma}_Y^2 - \sigma_Y^2 &= 1.645 - 0.500 = 1.145 \end{aligned}$$

Le varianze sono significativamente diverse perché $X$ non è concentrata dove la funzione $Y = \sin X$ è lineare, ovvero perché $Y = \sin X$ è significativamente non lineare in $[\mu_X - 2\sigma_X, \mu_X + 2\sigma_X]$.

### Esercizio 2.12

Sia data la variabile casuale standardizzata $Z = \mathcal{N}(0,1)$ e la variabile casuale $Y = g(Z) = Z^2$. Se si calcola la media di $Y$ con la formula approssimata $\mu_Y \cong g(\mu_Z)$ risulta $\mu_Y \cong 0$.

a) Qual è l'errore che si commette applicando tale formula?

b) Se $Y = aZ^2$, quale valore deve avere $a$ perché $\mu_Y \cong 0$ si verifichi con un errore non più grande di 0.1?

**Svolgimento**

a) Per il teorema della media vale

$$\mu_Y = E_Z[g(z)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) \cdot f_Z(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \cdot f_Z(z)dz$$

Poiché $\mu_Z = 0$ si può scrivere:

$$\mu_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \cdot f_Z(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_Z)^2 \cdot f_Z(z)dz$$

Questo integrale corrisponde alla definizione di $\sigma_Z^2$, che nel caso della variabile $Z$ in esame si sa essere uguale a 1, quindi:

$$\mu_Y = 1$$

Inoltre $\mu_Y \cong g(\mu_Z) = 0$, perciò l'errore che si commette usando questo valore è:

$$\mathcal{E}_\mu = \mu_Y - g(\mu_Z) = 1$$

b) Se $Y = aZ^2$, applicando lo stesso ragionamento del punto a) si ricava:

$$\mu_Y = E_Z(g(z)) = \int_{-\infty}^{+\infty} az^2 \cdot f_Z(z)dz = a$$

L'errore in questo caso è:

$$\mathcal{E}_\mu = \mu_Y - g(\mu_Z) = a - 0 = a$$

$\mathcal{E}_\mu$ risulta non più grande di 0.1 quando $a \leq 0.1$.

## Esercizio 2.13

Data una variabile statistica $X$ con media $\mu_X = 140$ e varianza $\sigma_X^2 = 100$, trovare un limite inferiore della probabilità che $X$ abbia valori compresi nell'intervallo (120, 160) usando il teorema di Tchebychef. Inoltre calcolare la probabilità corrispondente al medesimo intervallo nel caso in cui $X$ sia estratta da una variabile casuale normale con media e varianza assegnate.

**Svolgimento**
Si applica il teorema di Tchebychef:

$$P(\mu_X - \lambda\sigma_X \leq X \leq \mu_X + \lambda\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2}$$

Sapendo che (120,160) corrisponde a un intervallo, centrato sulla media $\mu_X$, di ampiezza $4\sigma$, cioè: $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$, con $\lambda = 2$, si ha:

$$P(\mu_X - 2\sigma_X \leq X \leq \mu_X + 2\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{4} = 0.75$$

Quindi $P = 0.75$ è il limite inferiore cercato.

**Esercizio 2.14**
Data la variabile casuale $X$

$$X = \begin{cases} -1 & 1 & 2 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{cases}$$

a) calcolare la funzione generatrice dei momenti $g_X(t) = E\{e^{tX}\}$ e, da questa, media e varianza di $X$;

b) trovare la distribuzione di $Y = \dfrac{1}{1+X^2}$.

**Svolgimento**
a) Funzione generatrice dei momenti:

$$g_X(t) = E\{e^{tX}\} = 0.25 \cdot e^{-t} + 0.25 \cdot e^t + 0.5e^{2t}$$

$$\left.\frac{d^n}{dt^n} g_X(t)\right|_{t=0} = E\{X^n\}$$

Calcolo di media e varianza di $X$:

$$\mu_X = \left.\frac{dg_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = -0.25e^{-t} + 0.25e^t + e^{2t}\Big|_{t=0} = 1$$

$$\sigma_X^2 = \left.\frac{d^2 g_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} - \mu_X^2 = 0.25e^{-t} + 0.25e^t + 2e^{2t}\Big|_{t=0} - 1 =$$

$$= 2.5 - 1 = 1.5$$

b) Calcolo dei valori argomentali di $Y = \dfrac{1}{1+X^2}$:

| $X$ | -1 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $Y$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{5}$ |

Distribuzione di $Y$:

$$Y = \begin{cases} 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{cases}$$

**Esercizio 2.15**

Determinare i primi due momenti semplici e centrali della variabile casuale avente funzione densità di probabilità :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x} \cdot x^2 & x \geq 0 \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

**Svolgimento**
Momenti semplici $\mu_n = E_X\{X^n\}$:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= E_X\{X\} = \int_0^{+\infty} x f_X(x) dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx = \\ &= \left[-\frac{1}{2}e^{-x}x^3\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} 3x^2 e^{-x} dx = \\ &= 3\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-x}x^2 dx \end{aligned}$$

Ma poiché per la condizione di normalizzazione deve essere

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-x}x^2 dx = 1$$

si ha $\mu_1 = 3$.

$$\begin{aligned} \mu_2 &= E_X\{X^2\} = \int_0^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x}x^4 dx = \\ &= \left[-\frac{1}{2}e^{-x}x^4\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x} 4x^3 dx = 4\left[\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x}x^3 dx\right] = \\ &= 4 \cdot 3 = 12 \end{aligned}$$

Momenti centrali $\overline{\mu}_n = E_X\{(X - \mu_X)^n\}$:

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}_1 &= E_X\{(X - \mu)\} = \mu_X - \mu_X = 0 \\
\overline{\mu}_2 &= E_X\{(X - \mu_X)^2\} = \sigma_X^2 = E_X\{X^2\} - \mu_X^2 = 12 - 9 = 3
\end{aligned}$$

È possibile in alternativa utilizzare la funzione generatrice dei momenti per il calcolo dei momenti semplici:

$$g_X(t) = E_X\{e^{tX}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x) dx$$

In questo caso:

$$g_X(t) = \int_0^{+\infty} e^{tx} \left(\frac{1}{2} e^{-x} \cdot x^2\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{(t-1)x} \cdot x^2 dx = -\frac{1}{(t-1)^3}$$

La relazione tra $g_X(t)$ e i momenti semplici $\mu_n$ è data da:

$$\mu_n = \left. \frac{d^n}{dt^n} g_X(t) \right|_{t=0}$$

quindi

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= E_X\{X\} = \frac{d}{dt}[-(t-1)^{-3}]_{t=0} = \frac{d}{dt}[(1-t)^{-3}]_{t=0} = \\
&= 3\,(1-t)^{-4}\Big|_{t=0} = 3 \\
\mu_2 &= E_X\{X^2\} = \frac{d^2}{dt^2}[-(t-1)^{-3}]_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2}[(1-t)^{-3}]_{t=0} = \\
&= 12\,(1-t)^{-5}\Big|_{t=0} = 12
\end{aligned}$$

Si noti che per il calcolo di tutti i momenti semplici si può anche utilizzare lo sviluppo:

$$g_X(t) = 1 + \mu_1 t + \mu_2 \frac{t^2}{2!} + \mu_3 \frac{t^3}{3!} + \dots$$

Essendo:

$$(1-t)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\alpha}{n} (-t)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha + n - 1)! t^n}{(\alpha - 1)! n!}$$

$$(1-t)^{-3} = 1 + 3t + 12\frac{t^2}{2!} + 60\frac{t^3}{3!} + \ldots$$

si ha immediatamente:

$$\mu_1 = 3 \quad ; \quad \mu_2 = 12 \; .$$

**Esercizio 2.16**

Supposto che $X$ sia una variabile casuale normale con media $\mu_X$ e varianza $\sigma_X^2$ note, si definisca $Y = g(X)$ con $g(X)$ funzione liscia definita su tutto l'asse reale; usando lo sviluppo di Taylor di $y = g(x)$ attorno al punto $\mu_X$ si dia un'espressione approssimata di $\mu_Y$, valida fino al quarto ordine di $\sigma_X$.

**Svolgimento**
Si sviluppa la funzione $Y = g(X)$ in serie di Taylor:

$$g(x) = g(\mu_X) + g'(\mu_X)(x-\mu_X) + \frac{1}{2}g''(\mu_X)(x-\mu_X)^2 + \\ + \frac{1}{6}g'''(\mu_X)(x-\mu_X)^3 + \frac{1}{24}g''''(\mu_X)(x-\mu_X)^4 + o(x^4)$$

quindi, dato che per una variabile casuale simmetrica (come la normale) si annullano i momenti di ordine dispari, si ha:

$$\mu_Y = E\{g(x)\} \cong g(\mu_X) + 0 + \frac{1}{2}g''(\mu_X)\sigma_X^2 + 0 + \frac{1}{24}g''''(\mu_X)\overline{\mu}_4$$

Poiché per una distribuzione normale:

$$\overline{\mu}_4 = 3 \cdot \sigma_X^4 = 3 \cdot (\sigma_X^2)^2$$

si ottiene:

$$\mu_Y \cong g(\mu_X) + \frac{1}{2}g''(\mu_X)\sigma_X^2 + \frac{1}{8}g''''(\mu_X)\sigma_X^4$$

# Esercizi

## Esercizio 2.17

Data la variabile casuale discreta che rappresenta l'evento casuale "lancio di una moneta", si ricavi la funzione di distribuzione corrispondente.

[**R:** $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$ ]

## Esercizio 2.18

Sia data la variabile statistica:

$$X = \begin{cases} 0.5 & 3.7 & 4.4 & 4.8 & 5.1 & 5.3 & 5.8 & 9.0 \\ 2 & 2 & 7 & 12 & 15 & 9 & 1 & 2 \end{cases}$$

a) Si determinino le frequenze relative di ogni valore e la funzione cumulativa di frequenza.

b) Dati gli intervalli [0,3] [3,4] [4,5] [5,6] [6,9] si determinino le frequenze relative a questi intervalli, si disegni l'istogramma e la funzione cumulativa di frequenza.

[**R:**
$$\begin{array}{lcllllllll} f_i & = & 0.04 & 0.04 & 0.14 & 0.24 & 0.3 & 0.18 & 0.02 & 0.04 \; ; \\ F(x_i) & = & 0.04 & 0.08 & 0.22 & 0.46 & 0.76 & 0.94 & 0.96 & 1.00 \; ; \end{array}$$
$$\begin{array}{lcllllll} f(\Delta x_i) & = & 0.04 & 0.04 & 0.38 & 0.50 & 0.04 & ; \\ h_i & = & 0.013 & 0.04 & 0.38 & 0.50 & 0.013 & ; \\ F(\Delta x_i) & = & 0.04 & 0.08 & 0.46 & 0.96 & 1.00 & ] \end{array}$$

## Esercizio 2.19

Data la variabile casuale discreta

$$X = \begin{cases} -2 & 1 & 3 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{cases}$$

ricavare $\mu_X$ e $\sigma_X^2$.

[**R:** $\mu_X = 0$ ; $\sigma_X^2 = 4.5$]

**Esercizio 2.20**

Dato l'evento casuale "lancio di due dadi" ricavare e disegnare la funzione di distribuzione corrispondente alla variabile casuale discreta:

$$X = \max(d_1, d_2) \ ,$$

[**R**:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ; |
| $F(x_i)$ | 1/36 | 4/36 | 9/36 | 16/36 | 25/36 | 36/36 | ; |

$\mu_X = 161/36 = 4.4722$ ; $\sigma_X^2 = 1.97145$]

**Esercizio 2.21**

Data la densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} x^2 & C \leq x \leq C+1 \qquad (C > 0) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

si trovi il valore di $C$.

[**R:** $C = 0.4574$]

**Esercizio 2.22**

Data la densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + k & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

a) si valuti $k$;

b) si verifichi che sia $f(x) \geq 0$ sempre;

c) si determini $P(1 \leq X \leq 2)$.

[**R:** $k = 1/12$ ; $P(1 \leq X \leq 2) = 1/3$]

**Esercizio 2.23**

Data la variabile casuale $X$ con densità di probabilità :

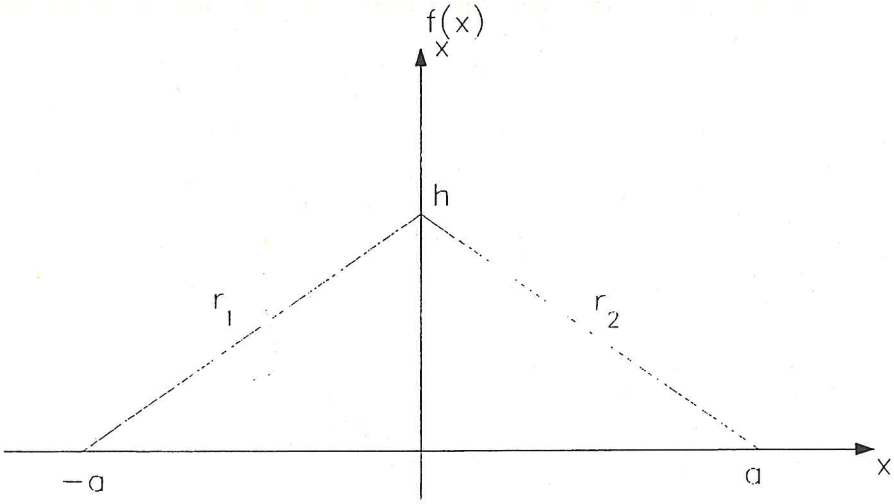
$$f_X(x) = k(x^2 - 1) \qquad (1 \leq x \leq 3) \ ,$$

determinare il valore di $k$, calcolare $\mu_X$ e $\sigma_X$, calcolare la probabilità che $x \leq 2$.

[**R:** $k = 3/20$ , $\mu_X = 12/5$ , $\sigma_X = 0.4472$ , $P(X \leq 2) = 0.2$]

**Esercizio 2.24**

Data una funzione densità di probabilità triangolare




a) determinare la costante $h$ in funzione di $a$;

b) calcolare la funzione di distribuzione, la media e la varianza in funzione di $a$.

$$[\mathbf{R:}\ h = 1/a\ ;\ F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -a \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{x}{a} + \dfrac{1}{2} & -a \leq x \leq 0 \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{x}{a} + \dfrac{1}{2} & 0 \leq x \leq a \\ 1 & x \geq a \end{cases}\ ;$$

$\mu_X = 0\ ;\ \sigma_X^2 = a^2/6]$

**Esercizio 2.25**

Sia data una variabile casuale continua con densità di probabilità della forma:

$$f_X(x) = \begin{cases} A(3x - x^2) & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

a) Determinare il coefficiente $A$;

b) scrivere l'espressione della funzione di distribuzione;

c) calcolare la probabilità che $X$ assuma il valore 2, $P(X = 2)$;

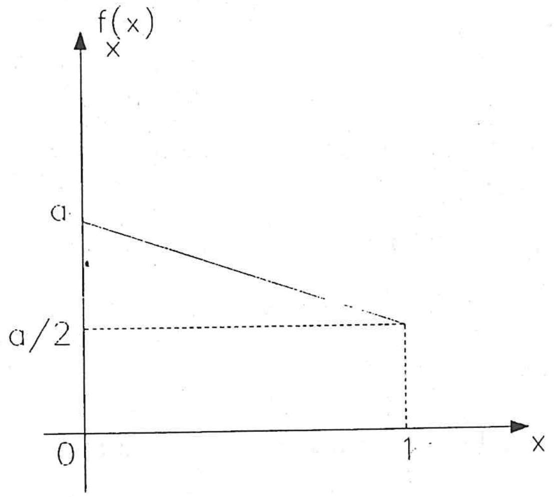
d) calcolare la probabilità che $X$ assuma valori compresi nell'intervallo [1,2], $P(1 \leq X \leq 2)$.

[**R:** $A = 2/9$ , $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{3}\left(1 - \frac{2}{9}x\right) & 0 \leq x \leq 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$

$P(X = 2) = 0$ , $P(1 \leq X \leq 2) = 13/27 = 0.4815$]

### Esercizio 2.26

Data la funzione rappresentata in figura

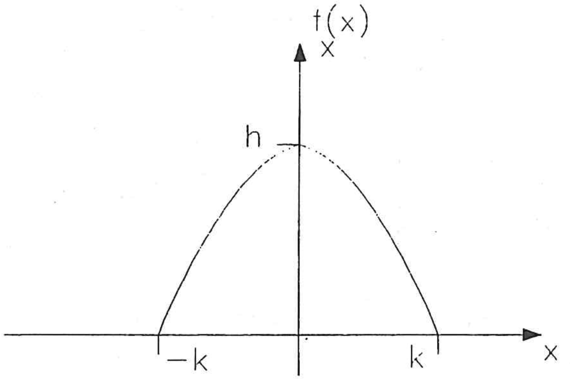



stabilire il valore di $a$ affinché $f_X(x)$ rappresenti una densità di probabilità ; determinare inoltre la media e la varianza della variabile casuale $X$ con tale distribuzione.

[**R:** $a = 4/3$ , $\mu_X = 4/9$ , $\sigma_X^2 = 0.0802$]

**Esercizio 2.27**

Sia data la densità di probabilità




che tra $-k$ e $+k$ ha equazione:

$$f_X(x) = \begin{cases} Ax^2 + h & -k \leq x \leq +k \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

a) Determinare la relazione che deve esistere tra $h$ e $k$ perché $f_X(x)$ sia una densità di probabilità ;

b) determinare $\mu_X$ e $\sigma_X^2$ in funzione di $k$.

[**R:** $h = 3/(4k)$ , $\mu_X = 0$ , $\sigma_X^2 = (k^2)/5$]

**Esercizio 2.28**

Una variabile casuale $X$ è caratterizzata da una densità di probabilità data da:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

a) Verificare che $f_X(x)$ sia una densità di probabilità e calcolare $F(x)$;

b) calcolare $\mu_X$ e $\sigma_X^2$;

c) calcolare $P(1 \leq X \leq 1.5)$.

$$[\mathbf{R:}\ F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{4}x^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases} \ ;$$

$\mu_X = 4/3$ , $\sigma_X^2 = 2/9$ ; $P = 0.3125$]

**Esercizio 2.29**

Data la variabile casuale $X$ con densità di probabilità :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ Cx^2 & 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{C}{x^4} & x > 1 \end{cases}$$

determinare $C$ e $F(x)$.

$$[\mathbf{R:}\ C = 3/2 \ ; \ F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2x^3} & x \geq 1 \end{cases} \ ]$$

**Esercizio 2.30**

Sia data la variabile casuale $X$

$$X = \begin{cases} -3 & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{cases}$$

e sia $Y = X^2$. Calcolare $\mu_Y$ e $\sigma_Y^2$.

[**R:** $\mu_Y = 14/3$ ; $\sigma_Y^2 = 10.8889$]

**Esercizio 2.31**

La variabile casuale $X$ descrive la durata di un componente elettronico.

Tale durata si può ritenere distribuita secondo la seguente densità di probabilità :

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x > 0 \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

a) Verificare che $f_X(x)$ sia una densità di probabilità ;

b) sapendo che $\mu_X = \frac{1}{2}$ e $\sigma_X^2 = \frac{1}{4}$, e sapendo che la durata $Y$ di un secondo componente è legata ad $X$ dalla relazione:

$$Y = 2X + 1$$

determinare la densità di probabilità di $Y$, la sua media e la sua varianza nel modo più veloce.

[**R:** $f_Y(y) = \begin{cases} e^{1-y} & y > 1 \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ ; $\mu_Y = 2$ ; $\sigma_Y^2 = 1$]

**Esercizio 2.32**

Data la variabile casuale $X$ caratterizzata dalla funzione densità di probabilità :

$$f_X(x) = Ae^{-B|x|} \qquad (-\infty \leq x \leq +\infty)$$

con $B = 2.186$, si determinino il valore di $A$, la media e lo scarto quadratico medio di $X$.

[**R:** $A = 1.093$ ; $\mu_X = 0.000$ ; $\sigma_X = 0.676$]

**Esercizio 2.33**

Calcolare l'indice di skewness per la variabile casuale $X$ avente $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}x & 0 \leq x < +\infty \\ \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

[**R:** $\beta = 1.4142$]

**Esercizio 2.34**

Sia data la variabile casuale discreta

$$X = \begin{cases} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{cases}$$

a) Si calcolino $\mu_X$ e $\sigma_X^2$.

b) Si calcolino mediana ($\mu_e$), moda ($\nu_0$), $\delta, \delta_e$ (M.A.V.) e m.a.v.

c) Definita la variabile casuale $Y = e^X$, si calcoli $P(Y \geq 1)$.

[**R:** $\mu_X = 0.10$ ; $\sigma_X^2 = 0.69$ ; $\mu_e = 0$ ; $\nu_0 = 1$ ; $\delta = 0.72$ ; $\delta_e = 0.70$ ; m.a.v. $= 0$ ; $P(Y \geq 1) = 0.70$]

**Esercizio 2.35**

Sia data la variabile casuale continua $X$ caratterizzata dalla densità di probabilità :

$$f_X(x) = \begin{cases} Ae^{-\frac{1}{2}x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

a) Si calcoli $A, \mu_X, \sigma_X^2$.

b) Definita la variabile casuale $Y = \log X$, si trovi la densità $f_Y(y)$. (Si usi per $A$ la costante precedentemente determinata).

[**R:** $A = 1/2$ ; $\mu_X = 2$ ; $\sigma_X^2 = 4$ ; $f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{y-1/2e^y}$]

**Esercizio 2.36**

Sia data una variabile casuale $Y$ con densità di probabilità

$$f_Y(y) = \frac{C}{1 + a^2y^2}$$

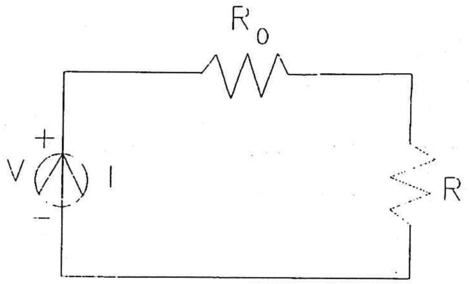
a) Si determini il valore di $C$ in funzione di $a$ (supposto che $a > 0$);

b) si trovi la densità di probabilità della variabile casuale $W = |Y|$.

[**R:** $C = \frac{a}{\pi}$ ; $f_W(w) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{a}{(1 + a^2w^2)} & w \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ ]

### Esercizio 2.37

Nel circuito in figura la resistenza $R$ è una variabile casuale con distribuzione uniforme tra 900 e 1100 $\Omega$. L'intensità di corrente $I = 0.01\ A$ e la resistenza $R_0 = 1000\ \Omega$ sono costanti.




Determinare la densità $f_V(V)$ della differenza di potenziale

$$V = RI + R_0 I \ .$$

[**R:** $f_V(V) = \begin{cases} 0.5 & 19 \leq V \leq 21 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ ]

### Esercizio 2.38

Sia data la variabile casuale $X$ con funzione densità di probabilità :

$$f_X(x) = \begin{cases} Ax(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

a) Determinare la costante $A$ e ricavare la media e la mediana di $X$.

b) Data poi la trasformazione:

$$Y = \frac{X}{1-X}$$

determinare la funzione densità di probabilità $f_Y(y)$.

[**R:** $A = 6$ ; $\mu_X = 1/2$ ; $\mu_e = 1/2$ ;

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{6y}{(y+1)^4} & 0 \leq y \leq +\infty \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$ ]

**Esercizio 2.39**

Si consideri la variabile casuale

$$X \sim \mathcal{N}(0,4) \ .$$

a) Si dia la formula della funzione di distribuzione e della densità di probabilità della variabile

$$Y = |X| \ ;$$

b) si calcolino $\mu_Y$, $\sigma_Y^2$.

[**R:** $F_Y(y) = F_Z\left(\frac{y}{2}\right) - F_Z(-\frac{y}{2})$ ; $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{8}}$ (per $y \geq 0$) ;
$\mu_Y = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}$ ; $\sigma_Y^2 = \frac{4(\pi-2)}{\pi}$]

**Esercizio 2.40**

Sapendo che la densità di probabilità della velocità $v$ di una molecola di gas di massa $m$ è data da

$$f_V(v) = av^2 e^{-bv^2}$$

con $a$ e $b$ costanti dipendenti dal gas, determinare la densità di probabilità dell'energia cinetica $E = mv^2/2$.

[**R:** $f_E(E) = 2a\sqrt{\dfrac{2E}{m^3}} \cdot e^{-\frac{2bE}{m}}$]

**Esercizio 2.41**

Data la variabile casuale discreta

$$X = \begin{cases} -2 & 1 & 3 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{cases}$$

calcolare $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$.

[**R:** $\mu_1 = 0$ ; $\mu_2 = 4.5$ ; $\mu_3 = 3$ ; $\mu_4 = 28.5$]

**Esercizio 2.42**

Data la variabile casuale $X$ con funzione densità di probabilità

$$f_X(x) = A(c - |x|) \qquad |x| \le c \qquad (c > 0)$$

a) calcolare $A$ in funzione di $c$;

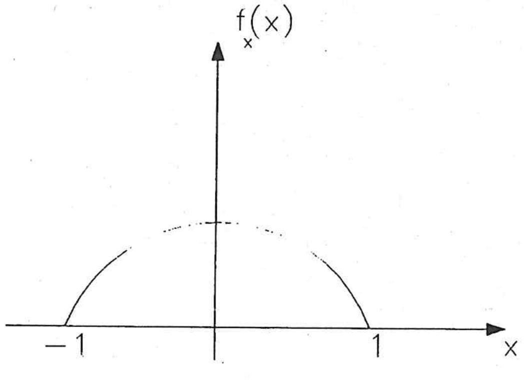
b) determinare la funzione generatrice dei momenti $g_X(t) = E\{e^{tX}\}$ e, a partire da questa, i valori di $\mu_X$ e $\sigma_X^2$.
(Si ricordi che $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)$).

[**R:** $A = \dfrac{1}{c^2}$ ; $g_X(t) = 1 + \dfrac{c^2 t^2}{12}$ ; $\mu_X = 0$ ; $\sigma_X^2 = \dfrac{c^2}{6}$]

**Esercizio 2.43**

Sia data la variabile casuale $X$ con densità di probabilità

$$f_X(x) = A(1 - x^2) \qquad |x| \le 1$$




Determinare:

a) la costante A;

b) la funzione generatrice dei momenti $g_X(t)$ (si ricorda che $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^2}{n!}$);

c) i valori di $\mu_X$ e $\sigma_X^2$;

d) i momenti semplici di ordine 2, 3, 4;

e) il valore dell'indice di curtosi $\gamma$.

Dire inoltre se la distribuzione è platicurtica o leptocurtica.

[**R:** $A = \frac{3}{4}$ ; $g_X(t) = \frac{3}{2t^2}\left(e^t + e^{-t} + \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^t}{t}\right)$ ; $\mu_X = 0$ ;
$\sigma_X^2 = 0.2$ ; $\mu_2 = 0.2$ ; $\mu_3 = 0$ ; $\mu_4 = \frac{3}{35}$ ; $\mu_{2n+1} = 0$ ;
$\mu_{2n} = \frac{3}{(2n+1)(2n+3)}$ , $\gamma = 2.1429$ (platicurtica)]

**Esercizio 2.44**

Sia data la variabile casuale $X$ distribuita uniformemente sull'intervallo [10, 11].

a) Calcolare $\mu_X$ e $\sigma_X^2$;

b) data la variabile casuale $Y = 2X + 3$, ricavare $f_Y(y)$ e $F_Y(y)$;

c) data la variabile casuale $Y = X^2$, ricavare $\mu_Y$ e $\sigma_Y^2$ sia in forma approssimata che rigorosa.

[**R:** $\mu_X = 10.5$ ; $\sigma_X^2 = 0.0833$ ; $f_Y(y) = \frac{1}{2}$ per $y \in [23, 25]$ ;

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 23 \\ \frac{1}{2}(y-23) & 23 \leq y \leq 25 \\ 1 & y \geq 25 \end{cases} ;$$

$\mu_Y = 110.33$ ; $\mu_Y \cong 110.25$ ; $\sigma_Y^2 = 36.7556$ ; $\sigma_Y^2 \cong 36.7353$]

**Esercizio 2.45**

Data una variabile casuale normale standardizzata $X$, determinare la funzione densità di probabilità e la media della variabile $Y = X^3$.

[**R:** $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{1/2y^{2/3}}}{3y^{2/3}}$ ; $\mu_Y = 0$]

**Esercizio 2.46**

Data la variabile casuale $X$ distribuita uniformemente tra 0 e $\frac{3}{4}\pi$ e data la variabile casuale $Y = \sin X$, determinare $f_Y(y)$.

$$[\mathbf{R:}\ f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{3\pi\sqrt{1-y^2}} & y \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}] \\ \\ \frac{8}{3\pi\sqrt{1-y^2}} & y \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1] \end{cases} \quad ]$$

### Esercizio 2.47

Determinare la funzione generatrice dei momenti, la media, la varianza e i momenti semplici $\mu_n$ della variabile casuale $X$ avente la seguente densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & x \geq 0 \\ \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$[\mathbf{R:}\ g_X(t) = \frac{a}{a-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{a}\right)^n \ ;\ \mu_X = \frac{1}{a}\ ;\ \sigma_X^2 = \frac{1}{a^2}\ ;\ \mu_n = \frac{n!}{a^n}]$$

### Esercizio 2.48

Determinare la funzione generatrice dei momenti e i primi due momenti semplici e centrali della variabile casuale $X$ tale che:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$[\mathbf{R:}\ g_X(t) = \frac{1}{(t-1)^2}\ ,\ \mu_1 = 2\ ,\ \mu_2 = 6\ ,\ \overline{\mu}_1 = 0\ ,\ \overline{\mu}_2 = 2]$$

### Esercizio 2.49

Dire se esiste una variabile casuale $X$ con media $\mu_X = 0$ e varianza $\sigma_X^2$ tale che:

$$P(X \in [-2\sigma_X, 2\sigma_X]) = 0.6$$

Giustificare la risposta.

[**R:** No; per il teorema di Tchebychef $P(X \in [\mu_X - 2\sigma_X,\ \mu_X + 2\sigma_X]) \geq 0.75$]

# 3 DISTRIBUZIONI DI ALCUNE IMPORTANTI VARIABILI CASUALI

## Variabili casuali discrete

### Variabile casuale con distribuzione binomiale (o di Bernoulli)

Si considera l'esperimento stocastico $\mathcal{E}$ con risultati possibili in $S$. Si suppone che $S$ sia partizionabile nei sottoinsiemi $A$ e $B$:

$$\begin{aligned} A \cup B &= S \\ A \cap B &= \Phi \end{aligned}$$

($\Phi$ insieme vuoto),

con $P(A) = p$, $P(B) = q$, $p + q = 1$.

Ripetendo $n$ volte $\mathcal{E}$ e supponendo che un risultato in $A$ corrisponda ad un successo dell'esperimento, si può definire la variabile discreta $K$ i cui valori argomentali $1, 2, \ldots, k, \ldots, n$ hanno probabilità

$$P(n,k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

Per questa variabile casuale discreta si ha:

$$\begin{aligned} \mu &= np \\ \sigma^2 &= npq \end{aligned}$$

## Variabile casuale con distribuzione multinomiale (o di Bernoulli generalizzata)

Si considera l'esperimento stocastico $\mathcal{E}$ con risultati possibili in $S$. Si suppone che $S$ sia partizionabile nei sottoinsiemi $A_1, \ldots, A_r$:

$$\begin{cases} \bigcup_{i=1}^{r} A_i = S \\ \\ A_i \cap A_j = \Phi \quad \forall i \neq j \end{cases}$$

Siano inoltre:

$$p(A_i) = p_i \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

Ripetendo $n$ volte $\mathcal{E}$ si può definire la variabile casuale discreta $r$-dimensionale $\underline{K}$ i cui valori argomentali $[k_1 \ k_2 \ \ldots \ k_r]^+$ hanno probabilità :

$$P_n(k_1, \ldots, k_r) = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$$

con $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$ e $0 \leq k_i \leq n \quad \forall i = 1, \ldots, r$.

Le medie e le varianze della variabile casuale sono date da:

$$\mu(k_i) = np_i$$

$$\sigma^2(k_i) = np_i(1 - p_i)$$

## Variabile casuale con distribuzione ipergeometrica

Si considera l'esperimento stocastico $\mathcal{E}_i$ con risultati possibili in $S_i$. Si suppone che $S_i$ sia partizionabile nei sottoinsiemi $A_i$ e $B_i$:

$$\begin{cases} A_i \cup B_i = S_i \\ A_i \cap B_i = \Phi \end{cases}$$

Si ripete $n$ volte l'esperimento supponendo che ad ogni ripetizione (cioè al crescere di $i$) l'insieme $S_i$ (e quindi o l'insieme $A_i$ o $B_i$) decresca di un'unità.

Si può definire allora una variabile discreta $K$ i cui valori argomentali $1, 2, \ldots, k, \ldots, n$ hanno probabilità :

$$P(n,k) = \frac{\binom{N_A}{k}\binom{N-N_A}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

con $N$ = numero dei risultati possibili in $S_1$, $N_A$ = numero dei risultati possibili in $A_1$.

Media e varianza della variabile casuale sono date da:

$$\mu = \frac{N_A n}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{N_A(N-N_A)n(N-n)}{N^2(N-1)}$$

## Variabile casuale con distribuzione geometrica

È detta variabile casuale con distribuzione geometrica, di parametro $p$, la variabile casuale $K$ i cui valori argomentali $1, 2, \ldots, k, \ldots$ hanno probabilità

$$P(k) = p(1-p)^{k-1}$$

Tale distribuzione dà la probabilità di ottenere il primo successo (in una successione di ripetizioni indipendenti) al $k$-esimo tentativo.

Media e varianza della variabile casuale sono date da:

$$\mu = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

Una proprietà fondamentale della variabile casuale con distribuzione geometrica è quella della mancanza di memoria:

$$P(K = k + m | K \geq k) = p(1-p)^{m-1} = P(K = m)$$

La relazione precedente indica che, in uno schema successo-insuccesso, la probabilità di dover eseguire ancora $m$ ripetizioni prima di ottenere il primo successo, se già si sono eseguite $k$ prove che hanno fornito come risultato un insuccesso, è indipendente da queste ultime.

## Variabile casuale con distribuzione poissoniana

Si consideri la distribuzione binomiale e si supponga che $n$ sia molto grande e $p$ molto piccolo. Si indichi inoltre $np = \lambda$. Se ora si fa tendere $n$ all'infinito e si ha $p$ piccolo in modo tale che $np = \lambda =$ costante, si ha:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)!k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{k} = \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)!n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Tale distribuzione, limite della distribuzione binomiale nel caso in cui si abbia uno schema successo-insuccesso con una probabilità $p$ molto piccola e un numero $n$ di eventi molto elevato, è detta distribuzione di Poisson. Una variabile casuale con distribuzione poissoniana è quindi una variabile casuale discreta $K$ i cui valori argomentali $1, \ldots, k, \ldots, n$ hanno probabilità

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Per tale variabile casuale (discreta a infiniti valori argomentali) si ha:

$$\mu = \lambda$$
$$\sigma^2 = \lambda$$

# Variabili casuali continue

## Variabile casuale con distribuzione uniforme

Una variabile casuale $X$ è uniformemente distribuita se la funzione densità di probabilità è data da:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Media e varianza della variabile casuale sono date da

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

## Variabile casuale con distribuzione normale (o gaussiana)

Una variabile casuale $X$ è normalmente distribuita se la funzione densità di probabilità è data da:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < \infty$$

dove $\mu$ e $\sigma$ sono rispettivamente la media e lo scarto quadratico medio della variabile casuale $X$. La variabile casuale può essere indicata con $X = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

La variabile casuale $Z$ con funzione densità di probabilità

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad -\infty < z < \infty$$

è detta normale standard $Z = \mathcal{N}(0,1)$ ed è caratterizzata dai parametri

$$\begin{cases} \mu = 0 \\ \sigma^2 = 1 \end{cases}$$

I valori:

$$F(z) - \frac{1}{2} = \int_0^z f_Z(z)dz$$

($F(z)$ = funzione di distribuzione) di tale variabile casuale sono riportati in appendice (Tab. 2).

La trasformazione da $X = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ a $Z = \mathcal{N}(0,1)$, detta standardizzazione, si ottiene mediante la relazione:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} .$$

## Variabile casuale con distribuzione lognormale

Una variabile casuale $X$ ha distribuzione lognormale se la sua funzione densità di probabilità è del tipo:

$$f_X(x) = \frac{1}{ax\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x - b)^2}{2a^2}} \qquad 0 \le x \le +\infty,\ a > 0$$

Media e varianza di tale variabile casuale sono date da:

$$\mu = e^{b+\frac{a^2}{2}}$$

$$\sigma^2 = \mu^2 \left(e^{a^2} - 1\right)$$

## Variabile casuale con distribuzione $\chi^2$

La $\chi^2$ è una variabile casuale con funzione densità di probabilità:

$$f(\chi^2) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\chi^2\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}}$$

dove $\Gamma$ indica la funzione $\Gamma$ di Eulero (o funzione fattoriale) definita per $s > 0$ da:

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \ .$$

La funzione $\Gamma$ per valori interi e seminteri è data da:

$$\begin{cases} \Gamma(1) = 1 \\ \Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2 \\ \Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1) \end{cases}$$

Il parametro $n$ presente nell'espressione della funzione densità di probabilità prende il nome di gradi di libertà.

Media e varianza di tale variabile casuale sono date da:

$$\mu = n$$
$$\sigma^2 = 2n$$

I valori della variabile casuale $\chi^2$ per $n = 1, \ldots, 100$ gradi di libertà, corrispondenti ad alcuni valori percentuali della funzione di distribuzione $(0.05\%, 1\%, \ldots, 99.5\%)$, sono riportati in appendice (Tab. 4a e 4b).

**Osservazione:** la variabile casuale con distribuzione $\chi^2$ ad $n$ gradi di libertà si ottiene come somma di $n$ variabili casuali indipendenti $X_1, \ldots, X_n$ con distribuzione normale standardizzata.

### Variabile casuale con distribuzione $t$ (di Student)

Una variabile casuale $T$ ha distribuzione $t$ di Student se la sua funzione densità di probabilità è data da:

$$f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \qquad -\infty < t < \infty$$

con $\Gamma$ = funzione di Eulero.

Il parametro $n$ prende il nome di gradi di libertà.

Media e varianza di tale variabile casuale sono date da:

$$\mu = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{n}{n-2} \qquad n > 2$$

Per grandi valori di $n$ si può porre $t \sim Z$, dove Z è la normale standardizzata.

I valori della variabile casuale $t$ per $n = 1, 2 \ldots$ corrispondenti ad alcuni valori percentuali della funzione di distribuzione (55%, ..., 99.5%) sono riportati in appendice (Tab. 3).

**Osservazione:** se si considera una variabile casuale $X$ normalmente distribuita $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ ed una variabile casuale $Y$ stocasticamente indipendente da $X$ e tale che $\frac{Y}{\sigma^2}$ sia distribuita come una $\chi^2$ a $n$ gradi di libertà, si ha che

$$T = \frac{X\sqrt{n}}{Y}$$

è una variabile casuale distribuita come una $t$ di Student a $n$ gradi di libertà.

### Variabile casuale con distribuzione esponenziale

Una variabile casuale $X$ ha distribuzione esponenziale se la funzione densità di probabilità è data da:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

dove $\lambda$ è un parametro positivo.

Media e varianza di tale variabile sono:

$$\mu = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

### Variabile casuale con distribuzione $F$ (di Fischer)

Una variabile casuale $F$ ha distribuzione $F$ di (Snedecor-)Fischer se ha funzione densità di probabilità :

$$f_F(F) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} F^{(m-2)/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{m}{n}F\right)^{(m+n)/2}} & F \geq 0 \\ \\ 0 & F < 0 \end{cases}$$

in cui $\Gamma$ è la funzione di Eulero, $m$ ed $n$ sono due parametri, detti gradi di libertà.

Media e varianza di tale variabile casuale sono date da:

$$\mu = \frac{n}{n-2} \qquad n > 2$$

$$\sigma^2 = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2 \quad (n-4)} \qquad n > 4$$

I valori della variabile casuale $F$ per $n = 1, 2, \ldots, 120$ ed $m = 1, 2, \ldots,$ 120, corrispondenti ad alcuni valori percentuali (99%, 97.5%, 95%, 90%) della funzione di distribuzione sono riportati in appendice (Tab. 5a, 5b, 6a, 6b, 7a, 7b, 8a, 8b).

**Osservazione:** la variabile casuale $F$ si ottiene dal rapporto

$$F = \frac{X/m}{Y/n}$$

con $X$ e $Y$ variabili indipendenti e distribuite come una $\chi^2$ rispettivamente ad $m$ ed $n$ gradi di libertà.

**Osservazione:** se si considera la relazione

$$\int_{F_{\alpha,m,n}}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} F^{(m-2)/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{m}{n}F\right)^{\frac{m+n}{2}}} dF = \alpha$$

in cui $F_{\alpha,m,n}$ è il valore critico della distribuzione per una coda di probabilità $\alpha$ e si introduce la nuova variabile $\overline{F} = 1/F$ si ha:

$$\int_{\overline{F}_{1-\alpha,n,m}}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{n}{m}\right)^{n/2} F^{(m-2)/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\left(1+\frac{n}{m}\overline{F}\right)^{\frac{m+n}{2}}} d\overline{F} = 1-\alpha$$

in cui

$$\overline{F}_{1-\alpha,n,m} = 1/F_{\alpha,m,n}$$

è quindi il valore critico della distribuzione $F$ a livello $1-\alpha$.

# Problemi risolti

## Esercizio 3.1

Calcolare media e varianza per le variabili casuali con le seguenti distribuzioni:

a) binomiale;
b) poissoniana;
c) $\chi^2$.

**Svolgimento**
a) Per la media della variabile casuale con distribuzione binomiale si ha:

$$\begin{aligned}
\mu &= \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)\dots(n-k+1)}{(k-1)!} p^{k-1}(1-p)^{n-k} = \\
&= np \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(n-1)\dots(n-\ell)}{\ell!} p^{\ell}(1-p)^{n-\ell-1} = \\
&= np\,(p+1-p)^{n-1} = np
\end{aligned}$$

Poiché inoltre

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \\
&= np \sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell+1) \begin{pmatrix} n-1 \\ \ell \end{pmatrix} p^{\ell}(1-p)^{n-\ell+1} = \\
&= np\,[1+(n-1)p] = np(1-p) + n^2p^2
\end{aligned}$$

si ha:

$$\sigma^2 = np\,(1-p) = npq$$

b) La media della variabile casuale con distribuzione poissoniana è data da:

$$
\begin{aligned}
\mu &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \\
&= e^{-\lambda} \lambda \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\ell}}{\ell!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda
\end{aligned}
$$

Analogamente per il momento del secondo ordine:

$$
\begin{aligned}
\mu_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) \frac{\lambda^{\ell}}{\ell!} = \\
&= e^{-\lambda} \lambda [(\lambda+1) e^{\lambda}] = \lambda + \lambda^2
\end{aligned}
$$

Quindi la varianza è:

$$
\sigma^2 = \lambda
$$

c) La media della variabile casuale con distribuzione $\chi^2$ è data da:

$$
\begin{aligned}
\mu &= \int_0^{\infty} \chi^2 \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\chi^2\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\chi^2 = \\
&= \int_0^{\infty} \frac{(\chi^2)^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (-2) d\left(e^{-\frac{\chi^2}{2}}\right) = \\
&= \frac{(\chi^2)^{\frac{n}{2}} (-2)}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{\chi^2}{2}} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2 \frac{n}{2} \frac{(\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\chi^2 = \\
&= n \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\chi^2\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\chi^2 = n
\end{aligned}
$$

Poiché:

$$
\mu_2 = \int_0^{\infty} \left(\chi^2\right)^2 \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\chi^2\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\chi^2 =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \frac{(\chi^2)^{\frac{n}{2}+1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(-2)d\left(e^{-\frac{\chi^2}{2}}\right) = \\
&= \int_0^\infty 2\left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{(\chi^2)^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}e^{-\frac{\chi^2}{2}}d\chi^2 = \\
&= (n+2)\mu = n(n+2)
\end{aligned}
$$

la varianza è data da:

$$\sigma^2 = 2n$$

**Esercizio 3.2**

Quante volte occorre lanciare un dado per avere probabilità 0.5 che esca almeno una volta il 6?

**Svolgimento**

Si tratta di una distribuzione binomiale:

$$
\begin{cases}
p = \frac{1}{6} & \text{(probabilità che esca il 6)} \\
q = \frac{5}{6} & \text{(probabilità che esca un numero diverso da 6)}
\end{cases}
$$

La probabilità che esca almeno una volta il 6 è uguale alla probabilità che esca il 6 una volta, oppure 2, oppure $N$ volte su $N$ lanci ($N$ è l'incognita). Cioè deve essere:

$$P = P(N,1) + P(N,2) + \ldots + P(N,N) = 0.5$$

$$P = \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = 0.5$$

Quindi se la probabilità che esca almeno 1 volta il 6 su $N$ lanci è 0.5, allora si ha probabilità 0.5 che su $N$ lanci il 6 esca 0 volte. Cioè:

$$P(N,0) = \binom{N}{0} p^0 q^N = 0.5$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^N = 0.5$$

$$N = \log_{\frac{5}{6}} 0.5 = \log_{0.8333} 0.5$$

Ricordando la relazione:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

si può scrivere:

$$\log_{0.8333} 0.5 = \frac{\log_{10} 0.5}{\log_{10} 0.8333} = \frac{-0.3010}{-0.0792} = 3.8006$$

Cioè occorre lanciare almeno 4 volte un dado per avere $p = 0.5$ che esca almeno una volta 6.

Si noti che il risultato si può ottenere a prescindere dal riconoscere che si tratta di una distribuzione binomiale, osservando che la probabilità totale è:

$$P = P(1) + P(2) + \ldots + P(N) = 0.5$$

dove $P(k), k = 1, \ldots, N$ è la probabilità composta di ottenere $k$ volte il 6 e $N - k$ volte un numero diverso da 6:

$$P(k) = \binom{N}{k} \left(\tfrac{1}{6}\right)^k \left(\tfrac{5}{6}\right)^{N-k}$$

La probabilità totale è data da:

$$P = \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \left(\tfrac{1}{6}\right)^k \left(\tfrac{5}{6}\right)^{N-k},$$

che è proprio la formula scritta all'inizio dell'esercizio.

**Esercizio 3.3**

La percentuale di studenti fuori corso, per la facoltà di ingegneria, è 30.1; assumendo tale valore come la probabilità per uno studente di andare fuori corso, determinare la probabilità che su 4 amici che si iscrivono a tale facoltà:

a) nessuno vada fuori corso;

b) tutti e quattro vadano fuori corso.

**Svolgimento**
Ricordando la legge binomiale:

$$P(n,k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^n$$

con:

$p =$ probabilità dell'evento favorevole $= \dfrac{30.1}{100}$

$q = 1 - p$

si ha:

$$P\{\text{nessuno fuori corso}\} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{30.1}{100}\right)^0 \left(\frac{100-30.1}{100}\right)^4 = 0.2387$$

$$P\{\text{quattro fuori corso}\} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \left(\frac{30.1}{100}\right)^4 \left(\frac{69.9}{100}\right)^0 = 0.0082$$

**Esercizio 3.4**

Lanciando 4 volte due dadi qual è la probabilità di ottenere il numero 9 almeno 2 volte?

**Svolgimento**
La probabilità di ottenere 9 su un lancio è data da:

$$p = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Utilizzando la legge binomiale:

$$P(n,k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k} \qquad k = 0, \ldots, 4 \quad p = \frac{1}{9}, \quad q = \frac{8}{9}$$

$$P(\text{almeno due 9 su 4 lanci}) = 1 - P(\text{nessun 9}) - P(\text{ un solo 9})$$

$$P(\text{nessun 9}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{9}\right)^0 \left(\frac{8}{9}\right)^4 = 0.624295$$

$$P(\text{un solo 9}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{9}\right)^1 \left(\frac{8}{9}\right)^3 = 0.312147$$

$$P(\text{almeno due 9}) = 0.0635$$

## Esercizio 3.5

Una prova d'esame è costituita da 8 domande, ciascuna con 4 risposte tra le quali il candidato deve segnare la risposta corretta. Se uno studente risponde casualmente alle otto domande, qual è la probabilità che passi l'esame, ammesso che per superare la prova siano sufficienti 5 risposte corrette?

**Svolgimento**

Siano:

$p$ = la probabilità di scegliere la risposta giusta $= \frac{1}{4}$

$q$ = la probabilità di scegliere la risposta sbagliata $= \frac{3}{4}$

Utilizzando la legge binomiale si ha:

$$P(\text{5 risposte corrette }) = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$P(\text{6 risposte corrette }) = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^6 \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$P(\text{7 risposte corrette }) = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^7 \left(\frac{3}{4}\right)$$

$$P(\text{8 risposte corrette }) = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^8$$

Quindi la probabilità richiesta è:

$$
\begin{aligned}
&P(\text{almeno 5 risposte corrette }) = \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left[\binom{8}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \binom{8}{6}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \right. \\
&\left. + \binom{8}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right) + \binom{8}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^3\right] = \\
&= 0.0273
\end{aligned}
$$

**Esercizio 3.6**

Calcolare la probabilità che un numero scelto a caso tra 0 e 9999 contenga almeno due volte la cifra 7.

**Svolgimento**

Utilizzando la legge binomiale si ha:

$$P_2 = P(2 \text{ volte } 7) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)^2$$

$$P_3 = P(3 \text{ volte } 7) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^3\left(\frac{9}{10}\right)$$

$$P_4 = P(4 \text{ volte } 7) = \left(\frac{1}{10}\right)^4$$

La probabilità richiesta è data da:

$$P = P_2 + P_3 + P_4 = 0.0523$$

**Esercizio 3.7**

Un dado viene lanciato $n$ volte. Determinare la probabilità :

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

che la $i$-esima faccia del dado si presenti $k_i$ volte, con:

$$\sum_{i=1}^{6} k_i = n$$

**Svolgimento**

Utilizzando la legge multinomiale si ha:

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{6} k_i!} \prod_{i=1}^{6} \left(\frac{1}{6}\right)^{k_i}$$

essendo la probabilità relativa ad ogni faccia costante ed uguale ad $\frac{1}{6}$.

Quindi:

$$P_n = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{6} k_i!} \left(\frac{1}{6}\right)^{\sum_{i=1}^{6} k_i} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{6} k_i!} \frac{1}{6^n}$$

**Esercizio 3.8**

Due amici, Carlo e Paolo, dopo aver estratto da un mazzo di carte i quattro assi e due jolly, ne fanno un mazzettino e mescolano queste carte, lasciandole sul tavolo coperte.

Le carte vengono poi scoperte una alla volta e viene stabilito che Carlo vince se l'ultima carta scoperta è un jolly, mentre perde se è un asso.

Valutare:

a) qual è la probabilità che Carlo vinca;

b) nel caso in cui la prima carta scoperta sia un jolly, quale probabilità ha Carlo di vincere;

c) qual è la probabilità composta che la prima carta scoperta sia un jolly e contemporaneamente Carlo vinca.

**Svolgimento**

a) Perchè Carlo vinca, tra le prime 5 carte scoperte devono uscire tutti gli assi. Usando la legge ipergeometrica si ha:

$$P(\text{Carlo vince}) = \frac{\binom{a}{k}\binom{j}{n-k}}{\binom{a+j}{n}}$$

dove:

$j$ = numero jolly;

$a$ = numero assi;

$n$ = numero estrazioni;

$k$ = numero estrazioni assi.

$$P(\text{Carlo vince}) = \frac{\binom{4}{4}\binom{2}{1}}{\binom{6}{5}} = \frac{2!}{\frac{6!}{5!}} = \frac{1}{3} = 0.3333$$

b) La condizione iniziale è : 5 carte coperte, di cui 4 assi e un jolly. Perchè Carlo vinca, scoprendo 4 carte deve ottenere sempre asso:

$$P(\text{Carlo vince}) = \frac{\binom{4}{4}\binom{1}{1}}{\binom{5}{4}} = \frac{1}{\frac{5!}{4!}} = \frac{1}{5} = 0.2$$

c) La probabilità composta è data dalla probabilità condizionata del punto b) per la probabilità ($= \frac{1}{3}$) che la prima carta sia un jolly:

$$P(\text{Carlo vince e la prima carta è un jolly}) = \frac{1}{15} = 0.0667$$

**Esercizio 3.9**

Da un'urna che contiene 5 palline bianche, 7 nere e 8 rosse, se ne estraggono 9. Qual è la probabilità che tra queste ve ne siano 2 bianche, 3 nere e 4 rosse, nell'ipotesi che le palline vengano estratte in blocco?

**Svolgimento**

L'esercizio si risolve utilizzando la legge ipergeometrica considerando tre diversi gruppi:

$$P = \frac{\binom{r}{k_r}\binom{b}{k_b}\binom{n}{k_n}}{\binom{r+b+n}{N}}$$

dove:

$r$ = numero palline rosse;

$b$ = numero palline bianche;

$n$ = numero palline nere;

$k_r$ = numero palline rosse estratte;

$k_b$ = numero palline bianche estratte;

$k_n$ = numero palline nere estratte;

$N$ = numero estrazioni.

Sostituendo nella relazione precedente i dati proposti dall'esercizio si ha:

$$P = \frac{\binom{5}{2}\binom{7}{3}\binom{8}{4}}{\binom{20}{9}} = 0.1459$$

### Esercizio 3.10

Si lancia ripetutamente un dado. Sia $T_1$ il tempo di prima uscita di un numero pari e $T_2$ il tempo di prima uscita del numero 2.

a) Calcolare le distribuzioni di probabilità di $T_1$ e $T_2$;

b) calcolare la probabilità condizionata

$$P(T_2 = k | T_1 = h)$$

### Svolgimento

a) $T_1$ e $T_2$ sono variabili aleatorie di distribuzione geometrica con parametri rispettivamente $p_1 = \frac{1}{2}$ e $p_2 = \frac{1}{6}$.

$$p(T_i = k) = p_i(1 - p_i)^{k-1} \qquad (i = 1, 2)$$

$$P(T_1 = h) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{h-1}$$

$$P(T_2 = k) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

Si osservi che le due variabili aleatorie non sono indipendenti tra loro perchè $T_1 \leq T_2$.

b) Si distinguano i tre casi:

- $h > k$

  cioè il tempo di uscita di un numero pari è maggiore del tempo di uscita del numero 2.

  Si ha:

$$P(T_2 = k | T_1 = h) = 0$$

- $h = k$

$$\begin{aligned} P(T_2 = h | T_1 = h) &= \frac{P(T_1 = T_2 = h)}{P(T_1 = h)} = \\ &= \frac{P\begin{pmatrix} h-1 \text{ uscite dispari} \\ 2 \text{ l'}h\text{-esima volta} \end{pmatrix}}{p_1(1-p_1)^{h-1}} = \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{h-1}\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{h-1}} = \frac{1}{3} = 0.3333 \end{aligned}$$

- $h < k$

$$P(T_2 = k | T_1 = h) = \frac{P(T_1 = h, T_2 = k)}{P(T_1 = h)}$$

  in questo caso $P(T_1 = h, T_2 = k)$ è uguale alla probabilità di avere $h-1$ uscite dispari, uscita di 4 o 6 all'$h$-esima volta, non uscita di 2 dall'$(h+1)$-esima alla $(k-1)$-esima volta, uscita di 2 la $k$-esima volta, e quindi:

$$P(T_2 = k | T_1 = h) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{h-1}\frac{2}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-h-1}\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{h-1}} = \frac{1}{9}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-h-1}$$

### Esercizio 3.11

Si lanciano prima un dado e poi contemporaneamente due monete. Se al lancio del dado è uscito un numero pari si vince se si ottengono due "teste", altrimenti si vince se esce un "testa" e un "croce". Calcolare la distribuzione del tempo del primo successo.

**Svolgimento**
Sia $T$ la variabile aleatoria che denota il tempo del primo successo

$$P(T = k) = P(T = k|\text{pari})P(\text{pari}) + P(T = k|\text{dispari})P(\text{dispari})$$

Si devono calcolare i due parametri $p_p$ e $p_d$ delle distribuzioni geometriche che caratterizzano la $T$.

$$p_p = P(\text{successo}|\text{pari}) = P(\text{due teste}) = \frac{1}{4}$$
$$p_d = P(\text{successo}|\text{dispari}) = P(\text{una testa, una croce}) = \frac{1}{2}$$

$$P(T = k) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3^{k-1}}{4^k} + \frac{1}{2^k}\right)$$

### Esercizio 3.12

La seguente tabella riporta il numero $k$ di incidenti automobilistici giornalieri avvenuti in una città in un periodo di 100 giorni.

| Numero incidenti $k$ | Numero di giorni $f$ |
|---|---|
| 0 | 45 |
| 1 | 37 |
| 2 | 11 |
| 3 | 5 |
| 4 | 1 |
| 5 | 1 |

Determinare il numero medio di incidenti giornalieri. Confrontare inoltre le frequenze teoriche, ottenute secondo la distribuzione di Poisson, con le frequenze osservate.

**Svolgimento**
Il numero medio di incidenti giornalieri è:

$$\mu = \frac{\sum_i k_i f_i}{\sum_i f_i} = \frac{83}{100} = 0.83$$

La distribuzione di Poisson è:

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

dove $\lambda = np$ è la media a cui tende la distribuzione al crescere della numerosità $n$: $\lambda = \mu$.

Quindi:

$$\lambda = 0.83$$

$$P(k=0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = 0.4360$$
$$P(k=1) = \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = 0.3619$$
$$P(k=2) = \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = 0.1502$$
$$P(k=3) = \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = 0.0416$$
$$P(k=4) = \frac{\lambda^4}{4!} e^{-\lambda} = 0.0086$$
$$P(k=5) = \frac{\lambda^5}{5!} e^{-\lambda} = 0.0014$$

Si ottiene la tabella seguente:

| $k$ | Fr. teoriche | Fr. osservate |
|---|---|---|
| 0 | 43.60 | 45 |
| 1 | 36.19 | 37 |
| 2 | 15.02 | 11 |
| 3 | 4.16 | 5 |
| 4 | 0.86 | 1 |
| 5 | 0.14 | 1 |

**Esercizio 3.13**

Il 12% degli utensili prodotti da una fabbrica risulta difettoso. Si trovi la probabilità che su 15 utensili scelti a caso 3 siano difettosi. Usare:

a) la distribuzione binomiale;

b) l'approssimazione di Poisson alla distribuzione binomiale.

**Svolgimento**

Si ha (essendo "estrazione di pezzo difettoso" = evento favorevole):

$$\begin{aligned} &p = 0.12 && \text{(probabilità dell'evento favorevole)} \\ &q = 1 - p = 0.88 \end{aligned}$$

La formula della binomiale dà:

$$P(15, 3) = \binom{15}{3} p^3 q^{12} = 0.1696$$

Per la poissoniana il valore $\lambda$ è dato da:

$$\lambda = np = 1.8$$

Quindi:

$$P(k = 3) = \frac{\lambda^3}{6} e^{-\lambda} = \frac{(1.8)^3}{6} e^{-\lambda} = 0.1607$$

**Esercizio 3.14**

Data la variabile casuale $X$ uniformemente distribuita, trovare l'intervallo di base $[a, b]$, sapendo che $\mu = 1$ e $\sigma^2 = \frac{1}{3}$.

**Svolgimento**

La variabile casuale $X$ ha distribuzione uniforme, quindi del tipo:

$$f_X(x) = \begin{cases} k & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Dalla condizione di normalizzazione si ricava:

$$k = \frac{1}{b - a}$$

Poiché

$$\mu = \int_a^b x f_X(x) dx = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = \int_a^b x^2 f_X(x) dx - \mu^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

si deve risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = 1 \\ \\ \dfrac{(b-a)^2}{12} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Si hanno le due soluzioni

$$a = 0 \quad , b = 2$$
$$a = 2 \quad , b = 0$$

di cui si accetta la prima, poiché deve essere $a \leq b$.

### Esercizio 3.15

Una macchina produce sferette con un diametro medio di 18 millimetri e deviazione standard pari a 2 millimetri. Trovare la probabilità che il diametro di una sferetta sia compreso fra 14 e 22 millimetri nell'ipotesi che il fenomeno segua una legge normale. Abbandonando tale ipotesi, trovare un limite inferiore all probabilità suddetta.

**Svolgimento**
a) Per il calcolo di $P(14 < x < 22)$ nell'ipotesi di legge normale, si consideri dapprima la standardizzazione:

$$\begin{cases} x_1 = 14 \quad \rightarrow \quad z_1 = \dfrac{14-18}{2} = -2 \\ \\ x_2 = 22 \quad \rightarrow \quad z_2 = \dfrac{22-18}{2} = 2 \end{cases}$$

Dalla tabella della normale standard (Tab. 2):

$$P(-2) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$$
$$P(2) = 0.5 + 0.4772 = 0.9772$$
$$P = P(2) - P(-2) = 0.9544$$

b) Nel secondo caso si usa la disuguaglianza di Tchebycheff (che vale non solo per la normale):

$$P(|X - \mu_X| =\leq \lambda\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2}$$

In questo caso $\lambda = 2$, quindi:

$$P[(18-4) < X < (18+4)] = P[(18-2\sigma) < X < (18+2\sigma)]$$

$$P[(\mu - 2\sigma) < X < (\mu + 2\sigma)] \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2} = 0.75$$

**Esercizio 3.16**

Una variabile casuale $X$ (lognormale) è legata ad una variabile standardizzata $Z$ dalla relazione

$$\log X = aZ$$

Si trovi:

a) la densità di probabilità di $X$;

b) la media e la varianza di $X$ (si consiglia di usare il teorema della media e la distribuzione di $Z$).

**Svolgimento**

a) Poiché:

$$\log X = aZ$$

si ha ovviamente:

$$X = e^{aZ} \; ,$$

essendo $Z$ una variabile casuale con distribuzione normale standardizzata, cioè

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

Per la $X$ si ha quindi una funzione densità di probabilità data da:

$$f_X(x) = \frac{f_Z(z)}{\left|\frac{dx}{dz}\right|} = \left.\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}}{ae^{az}}\right|_{z = \frac{\log x}{a}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{\log^2 x}{a^2}}}{ax}$$

b) Applicando il teorema della media:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{az} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 2az + a^2 - a^2)} dz =$$

$$= e^{\frac{a^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-a)^2} dz = e^{\frac{a^2}{2}}$$

Analogamente per il momento del secondo ordine:

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2az} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz = e^{2a^2}$$

e quindi:

$$\sigma^2 = e^{2a^2} - e^{a^2} = e^{a^2}\left(e^{a^2} - 1\right)$$

### Esercizio 3.17

Un tiratore spara 50 colpi su un centro con anelli di raggi rispettivamente uguali a: $R_1 = 1$ centimetro; $R_2 = 3$ centimetri; $R_3 = 6$ centimetri. Dopo aver sparato trova 12 colpi nell'anello esterno, 31 colpi nell'anello intermedio e 7 nel centro. Supponendo che la variabile $R^2$, $R$ essendo la distanza dal centro di ogni colpo, segua una distribuzione $\chi^2_{(2)}$, a 2 gradi di libertà con una costante moltiplicativa, $R^2 = 6\chi^2_{(2)}$ ($cm^2$), si confrontino tra loro le frequenze empiriche dei vari anelli con le probabilità definite dalla distribuzione teorica.

**Svolgimento**

In generale per una variabile casuale con distribuzione $\chi^2$ la funzione densità di probabilità è data da:

$$f(\chi^2) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\chi^2\right)^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}} \qquad (\chi^2 \geq 0)$$

Nel caso in esame i gradi di libertà sono $\nu = 2$ e quindi:

$$f(\chi^2) = \frac{1}{2\Gamma(1)} \left(\chi^2\right)^0 e^{-\frac{\chi^2}{2}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{\chi^2}{2}}$$

Per controllo si può verificare:

$$\int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d(\chi^2) = -\left[e^{-\frac{\chi^2}{2}}\right]_0^\infty = 1$$

Poichè si è supposto $R^2 = 6\chi^2_{(2)}$ si ha:

$$\begin{aligned}
R_1 = 1\text{cm} &\rightarrow \chi^2_{(2)} = \tfrac{1}{6} = 0.1667 \\
R_2 = 3\text{cm} &\rightarrow \chi^2_{(2)} = \tfrac{9}{6} = 1.5000 \\
R_3 = 6\text{cm} &\rightarrow \chi^2_{(2)} = \tfrac{36}{6} = 6.0000
\end{aligned}$$

Le relative probabilità sono date da:

$$P_1 = \int_{\chi^2=0}^{\chi^2=1/6} \frac{1}{2} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d(\chi^2) = -\left[e^{-\frac{\chi^2}{2}}\right]_0^{1/6} = 0.0799$$

$$P_2 = \int_{\chi^2=0}^{\chi^2=9/6} \frac{1}{2} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d(\chi^2) = -\left[e^{-\frac{9}{12}} - 1\right] = 0.5276$$

$$P_3 = \int_{\chi^2=0}^{\chi^2=36/6} \frac{1}{2} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d(\chi^2) = -\left[e^{-\frac{36}{12}} - 1\right] = 0.9502$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
&P(\text{centro}) &&= P_1 &&= 0.0799 \\
&P(\text{anello interno}) &&= P_2 - P_1 &&= 0.4477 \\
&P(\text{anello esterno}) &&= P_3 - P_2 &&= 0.4226
\end{aligned}$$

Volendo utilizzare le tabelle del $\chi^2$(Tab. 4a e 4b) e interpolando linearmente:

$$\begin{array}{lll} \text{centro}: & \chi^2 = 0.167 & \rightarrow \quad P_1 = 0.0796 \\ \text{anello interno}: & \chi^2 = 1.500 & \rightarrow \quad P_2 = 0.5199 \\ \text{anello esterno}: & \chi^2 = 6.000 & \rightarrow \quad P_3 = 0.9502 \end{array}$$

In definitiva:

| | Frequenza empirica | Probabilità teorica (integrale) | Probabilità teorica (tabelle) |
|---|---|---|---|
| centro | 7/50 = 0.14 | 0.0799 | 0.0796 |
| anello int. | 31/50 = 0.62 | 0.4477 | 0.4403 |
| anello est. | 12/50 = 0.24 | 0.4226 | 0.4303 |

**Esercizio 3.18**

Una macchina ha vita media $T$, prima di subire guasti, di 5 anni. Un acquirente compera 10 macchine di questo tipo e vuole sapere qual è la probabilità che una tra esse si rompa entro 2 anni.

Si osservi che il tempo di vita senza guasti di una singola macchina ha una distribuzione esponenziale. Con tale distribuzione si calcoli la probabilità che una macchina abbia un guasto nei primi due anni. Con questo valore poi si determini la probabilità di avere un guasto su dieci macchine usando la poissoniana.

**Svolgimento**

La variabile casuale $T$ ha distribuzione esponenziale:

$$f_T(t) = \frac{1}{5} e^{-\frac{t}{5}}$$

Allora la probabilità che una macchina abbia un guasto nei primi due anni è:

$$p = \frac{1}{5} \int_0^2 e^{-\frac{t}{5}} dt = 0.3297$$

La probabilità di avere un guasto su 10 macchine nei primi due anni è calcolata utilizzando la poissoniana, con:

$$\lambda = np = 10 \cdot 0.3297 = 3.297$$

$$P(1) = \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} = 3.297e^{-3.297} = 0.1220$$

Si noti che con la binomiale si ha invece:

$$P(10,1) = \binom{10}{1}(0.3297)(0.6703)^9 = 0.0901$$

**Esercizio 3.19**

Il tempo medio tra due forature di un certo tipo di gomma per una certa percorrenza, è 1.3 anni. Supponendo che ogni intervallo tra forature sia distribuito esponenzialmente, la somma di due intervalli è una distribuzione nota come $\Gamma$ con due gradi di libertà

$$f(t) = \rho^2 t e^{-\rho t} \qquad (t \geq 0)$$

Si trovi la relazione esistente tra $\rho$ e il tempo medio sopra citato e si trovi la probabilità che la seconda foratura cada dopo il quarto anno di uso delle gomme.

**Svolgimento**

Siano $t_1$ e $t_2$ i tempi di due singole forature a partire da un $t = 0$. La distribuzione di $t_1$ e $t_2$ ($t_1$ e $t_2$ sono indipendenti) è data da:

$$f(t_1) = \frac{1}{T}e^{-\frac{t_1}{T}}$$

$$f(t_2) = \frac{1}{T}e^{-\frac{t_2}{T}}$$

Si consideri la variabile:

$$t = t_1 + t_2$$

essa ha distribuzione

$$f(t) = \frac{1}{T^2}te^{-\frac{t}{T}}$$

cioè è una $\Gamma$ con 2 gradi di libertà, $T = \frac{1}{\rho}$.

Il tempo medio tra due forature è dato da:

$$E\{t_1\} = E\{t_2\} = 1.3$$

$$\int_0^\infty t_1 f(t_1) dt_1 = \int_0^\infty t_2 f(t_2) dt_2 = 1.3$$

$$\int_0^\infty t_1 \rho e^{-\rho t_1} dt_1 = \frac{1}{\rho}$$

Quindi:

$$\rho = \frac{1}{1.3} = 0.7692$$

$$f(t) = 0.5917 e^{-0.7692 t}$$

La probabilità che la seconda foratura cada dopo il quarto anno di uso delle gomme è data da:

$$P(t \geq 4) = \int_4^\infty f(t) dt = \int_4^\infty 0.5917 t e^{-0.7692} dt = 0.1879$$

# Esercizi

### Esercizio 3.20

Un'urna contiene 20 palline di cui 8 sono bianche e 12 sono nere. Si effettuino 5 estrazioni indipendenti e si determini la probabilità di estrarre 3 palline bianche.

[**R:** 0.2304]

### Esercizio 3.21

Se il 12% dei pezzi prodotti da una macchina è difettoso, trovare la probabilità che su 4 pezzi estratti a caso:

a) 1 pezzo sia difettoso,

b) nessun pezzo sia difettoso,

c) al massimo 2 pezzi siano difettosi.

[**R:** 0.3271; 0.5997; 0.9937]

### Esercizio 3.22

Si dispongono a caso $n$ punti nell'intervallo $(0, T)$. Si determini la probabilità che $k$ di essi cadano nell'intervallo $(t_1, t_2)$, essendo $0 < t_1 < t_2 < T$.

[**R:** $P(n,k) = \left( \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \left(\frac{t_2-t_1}{T}\right)^k \left(\frac{T-(t_2-t_1)}{T}\right)^{n-k}$]

### Esercizio 3.23

Sia $K$ una variabile distribuita binomialmente con $\mu = 2$ e $\sigma^2 = \frac{4}{3}$. Si determini la distribuzione di $K$.

[**R:** $P(k) = \left( \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (0.\overline{3})^k (0.\overline{6})^{n-k}$]

### Esercizio 3.24

Una scatola contiene 5 palline rosse, 3 bianche e 2 azzurre. Un campione di 6 palline viene estratto con reimbussolamento, ossia ogni pallina viene rimessa nella scatola prima di estrarre quella successiva. Si determini la probabilità che:

a) 3 palline siano rosse, 2 bianche e 1 azzurra;

b) 2 palline siano rosse, 3 bianche e 1 azzurra;

c) si presentino 2 palline di ciascun colore.

[**R:** 0.135; 0.081; 0.054]

### Esercizio 3.25

Un dado viene "truccato" cosicchè la faccia 6 si presenti con probabilità 0.3, la faccia opposta 1 si presenti con probabilità 0.1 e ciascuna delle altre facce si presenti con probabilità 0.15. Il dado viene lanciato 6 volte. Si determini la probabilità che

a) ciascuna faccia si presenti 1 volta;

b) le facce 4, 5 e 6 si presentino due volte ciascuna.

[**R:** 0.0109; 0.0041]

### Esercizio 3.26

Si supponga che un campione di 12 oggetti ne contenga 4 difettosi. Estraendo 2 oggetti qual è la probabilità

a) che siano entrambi difettosi;

b) che siano entrambi non difettosi.

[**R:** 0.0909; 0.4242]

### Esercizio 3.27

Un'urna contiene 2 palline bianche e 2 nere. Trovare la probabilità che estraendo 2 palline queste siano entrambe bianche nelle due ipotesi:

a) le palline sono estratte in blocco;

b) dopo aver estratto la prima pallina, questa viene rimessa nell'urna.

[**R:** $0.1\overline{6}$; 0.25]

**Esercizio 3.28**

Le carte di un mazzo (di 52) vengono girate una alla volta rimettendo poi la carta nel mazzo, finchè non si ottiene un asso. Qual è la probabilità che ciò accada alla terza carta?

[**R:** 0.0655]

**Esercizio 3.29**

Fra le 7.30 e le 9.30 dei giorni feriali transitano, in media, in un certo incrocio stradale 4000 automobili. Si sa che ogni automobile ha la probabilità di 0.03% di venire coinvolta in un incidente, in quel periodo, in quell'incrocio. Qual è la probabilità che il prossimo venerdì, in quelle due ore, capiti uno e uno solo incidente in quell'incrocio?

[**R:** 0.3614]

**Esercizio 3.30**

Si supponga che mediamente il 2% delle persone siano mancine. Si determini la probabilità che in un campione di 100 persone ve ne siano 3 o più mancine.

[**R:** 0.3233]

**Esercizio 3.31**

Il numero di radiazioni emesse ogni secondo da una sostanza radioattiva è definito da una variabile casuale con distribuzione di Poisson e valor medio uguale a 2. Calcolare la probabilità di avere più di tre radiazioni in un secondo.

[**R:** 0.1429]

**Esercizio 3.32**

Un centralino telefonico riceve in media 150 chiamate all'ora. Nell'ipotesi che le chiamate, in un dato intervallo di tempo, seguano una distribuzione di Poisson determinare:

a) la probabilità che in 2 minuti il centralino riceva 3 chiamate;

b) la probabilità che in 2 minuti il centralino riceva almeno una chiamata;

c) la probabilità che in 2 minuti il centralino riceva almeno 3 chiamate.

[**R:** 0.1404; 0.9933; 0.8753]

**Esercizio 3.33**

Si supponga che 300 errori di stampa siano distribuiti a caso in un libro di 500 pagine. Si determini la probabilità che una data pagina contenga:

a) esattamente due errori;

b) due o più errori.

[**R:** 0.0988; 0.1219]

**Esercizio 3.34**

Una variabile casuale normalmente distribuita ha $\mu = 40$. Trovare il suo scarto quadratico medio sapendo che l'82.3% dell'area al di sotto della curva densità di probabilità giace alla sinistra di $x = 45$.

[**R:** 5.3942]

**Esercizio 3.35**

Una variabile casuale $X$ è distribuita normalmente. Sulla base di un campione si trova che:

$$P(X < -2) = 10\%;$$

$$P(X < 4) = 90\%;$$

Si vuole conoscere la $P(X > 3)$.

Si noti che usando la simmetria della distribuzione si può determinare subito la media e quindi la varianza come nell'esercizio precedente.

[**R:** 0.1964]

**Esercizio 3.36**

Trovare la densità di probabilità del valore 5 di una normale con media 12 e varianza 16.

[**R:** 0.0216]

**Esercizio 3.37**

Calcolare la probabilità che una $\mathcal{N}$ (12,16):

a) assuma valori minori di 5;

b) assuma valori maggiori di 5;

c) assuma valori maggiori di 18;

d) assuma valori compresi tra 5 e 18.

[**R:** 0.0401; 0.9599; 0.0668; 0.8931]

**Esercizio 3.38**

Un professore decide che il punteggio finale degli studenti sia il valore di una variabile normalmente distribuita con media $\mu$ e varianza $\sigma^2$. Se il professore decide di assegnare un voto $A$ agli studenti il cui punteggio eccede $(\mu + \sigma)$; $B$ se cade tra $\mu$ e $(\mu + \sigma)$; $C$ se cade tra $(\mu - \sigma)$ e $\mu$; $D$ se cade tra $(\mu - 2\sigma)$ e $(\mu - \sigma)$, calcolare le percentuali di studenti che avranno voto $A$, $B$, $C$, $D$.

[**R:** 15.87%; 34.13%; 34.13%; 13.59%]

**Esercizio 3.39**

In corrispondenza ad un casello autostradale caratterizzato da scarso traffico si è osservato il passaggio di 10 autoveicoli successivi in uscita agli istanti di tempo (espressi in minuti) riportati nella tabella:

| autoveicolo | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| tempo | 0 | 13 | 21 | 31 | 40 | 51 | 64 | 73 | 82 | 89 |

Qual è la probabilità che il prossimo autoveicolo transiti entro l'intervallo di tempo $\Delta t = 14$ minuti?

(Si ricorda che gli intervalli di tempo sono indipendenti ed hanno distribuzione esponenziale con parametro $\lambda$).

[**R:** 0.7573]

# 4 VARIABILI CASUALI E VARIABILI STATISTICHE A PIÙ DIMENSIONI

## Variabili casuali

**Definizione:** una variabile casuale $n$-dimensionale è una distribuzione di probabilità su un insieme di valori in $\mathbb{R}^n$; è definita una probabilità per ogni insieme del tipo

$$I(\underline{x}_0) = (x_1 \leq x_{01} \; ; \; x_2 \leq x_{02} \; ; \ldots x_n \leq x_{0n}) \; .$$

$\underline{X}$, variabile casuale a $n$ dimensioni, è un vettore le cui componenti sono $n$ variabili casuali a 1 dimensione:

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

Un valore argomentale di $\underline{X}$ è un vettore:

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}$$

La funzione di distribuzione è

$$\begin{aligned} F(\underline{x}_0) &= F(x_{01}, x_{02} \ldots x_{0n}) = P(X_1 \leq x_{01} \; ; \; X_2 \leq x_{02} \; ; \ldots X_n \leq x_{0n}) \\ &= P(\underline{X} \in I(\underline{x}_0)) \end{aligned}$$

Se la distribuzione di probabilità è concentrata su punti discreti la variabile casuale si dice discreta, altrimenti si dice continua.

Per variabili casuali continue (e regolari) si definisce la funzione densità di probabilità

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{\partial^n F}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} .$$

Si consideri per semplicità il caso $n = 2$, $\underline{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$.

Le variabili casuali a due dimensioni discrete sono rappresentate da tabelle a doppia entrata:

| $Y$ / $X$ | $y_1$ | $y_2$ | $\ldots$ | $y_j$ | $\ldots$ | $y_m$ | $p_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $\ldots$ | $p_{1j}$ | $\ldots$ | $p_{1m}$ | $p_1$ |
| $x_2$ | $p_{2i}$ | | | $p_{2j}$ | | $p_{2m}$ | $p_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_i$ | $p_{i1}$ | | | $p_{ij}$ | | $p_{im}$ | $p_i$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_n$ | $p_{n1}$ | $p_{n2}$ | $\ldots$ | $p_{nj}$ | $\ldots$ | $p_{nm}$ | $p_n$ |
| $q_j$ | $q_1$ | $q_2$ | $\ldots$ | $q_j$ | $\ldots$ | $q_m$ | |

$n$ = numero di valori argomentali di $X$ ;
$m$ = numero di valori argomentali di $Y$ ;
$p_{ij}$ = $P(X = x_i \; ; \; Y = y_j) =$ distribuzione di probabilità congiunta;
$p_i$ = $P(X = x_i)$ ; $q_j = P(Y = y_j) =$ distribuzioni di probabilità marginali.

Le variabili casuali a due dimensioni continue possono essere descritte in termini di densità di probabilità funzione di due variabili:

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = f_{XY}(x, y) \qquad x, y \in D_{XY} \subseteq \mathbb{R}^2 .$$

# Distribuzioni marginali, distribuzioni condizionate. Indipendenza stocastica

Si danno le definizioni nel caso delle variabili casuali bidimensionali, rimandando per le variabile casuali $n$-dimensionali ai testi riportati in bibliografia (ad es. F. Sansó, 1996). Tale scelta è dettata dal fatto che gli esercizi proposti sono relativi a tale tipo di variabile casuale.

**Definizione:** si definisce distribuzione marginale la distribuzione di probabilità di una singola componente, indipendentemente dal valore assunto dall'altra.

Per trovare la distribuzione marginale di una componente si sommano (o si integrano) le probabilità dell'altra componente; per la variabile casuale discreta si ha:

$$\begin{aligned} P(X = x_i) &= \sum_{j=1}^{m} P(X = x_i \; ; \; Y = y_j) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = p_i \\ P(Y = y_j) &= \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i \; ; \; Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = q_j \end{aligned}$$

mentre per la variabile casuale continua si ha:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{D_Y} f_{XY}(x,y)dy \qquad (D_Y \subseteq \mathbb{R}, \text{ dominio di } Y) \\ f_Y(y) &= \int_{D_X} f_{XY}(x,y)dx \qquad (D_X \subseteq \mathbb{R}, \text{ dominio di } X) \end{aligned}$$

Si noti che le distribuzioni marginali sono normalizzate:

$$\sum_{j=1}^{m} q_j = 1 \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \qquad \text{nel caso discreto;}$$

$$\int_{D_X} f_X(x)dx = 1 \qquad \int_{D_Y} f_Y(y)dy = 1 \qquad \text{nel caso continuo.}$$

**Definizione:** si definisce probabilità condizionata la distribuzione di probabilità di una componente, avendo fissato un valore (o un intervallo di valori) per l'altra componente.

Dalla definizione si ha che

$$\begin{aligned} P(X = x_i | Y = y_j) &= \frac{p_{ij}}{q_j} \\ f_{X|Y}(X = x | Y = y) &= \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} \end{aligned}$$

**Teorema:** condizione necessaria e sufficiente perché $X$ e $Y$ siano stocasticamente indipendenti è che la distribuzione congiunta di probabilità si possa scomporre nel prodotto delle distribuzioni marginali:

$$p_{ij} = p_i q_j \quad \forall i, j$$
$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad \forall x, y$$

## Media, varianza, covarianza

**Definizione:** si definisce media di una variabile casuale $n$-dimensionale il vettore:

$$E_{\underline{X}}\{\underline{X}\} = \underline{\mu}_X = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \qquad \text{dove } \mu_i = E_{\underline{X}}\{X_i\} \ .$$

Per variabili casuali a due dimensioni, $\underline{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$, si ha $\underline{\mu}_X = \begin{bmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{bmatrix}$;

in particolare per variabili casuali discrete si ha:

$$\begin{aligned} \mu_X &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \\ \mu_Y &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij} = \sum_{j=1}^{m} y_j q_j \end{aligned}$$

per variabili casuali continue si ha:

$$\begin{aligned} \mu_X &= \int\int_{D_{XY}} x f_{XY}(x, y) dx\ dy = \int_{D_X} x f_X(x) dx \\ \mu_Y &= \int\int_{D_{XY}} y f_{XY}(x, y) dx\ dy = \int_{D_Y} y f_Y(y) dy \end{aligned}$$

**Definizione:** si definisce matrice di covarianza $C$, la matrice di elementi $c_{ij} = E_{\underline{X}}\{(X_i - \mu_{X_i})(X_j - \mu_{X_j})\}$.

Per $i = j$ si ha $c_{ii} = E\{(X_i - \mu_{X_i})^2\} = \sigma^2_{X_i}$ (varianza dell'$i$-esima componente).

Per $i \neq j$ $\ c_{ij} = \sigma_{X_i X_j} = \sigma_{ij}$ è detta covarianza delle componenti $i$ e $j$.

La matrice $C$ risulta essere simmetrica ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) e definita positiva ($\underline{a}^+ C \underline{a} \geq 0 \ \ \forall \underline{a} \in \mathbb{R}^n$).

Per $\underline{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ si ha:

$$\begin{aligned}
\sigma^2_X &= E_{XY}\{(X - \mu_X)^2\} = E_X\{X^2\} - \mu^2_X \\
\sigma^2_Y &= E_{XY}\{(Y - \mu_Y)^2\} = E_Y\{Y^2\} - \mu^2_Y \\
\sigma_{XY} &= E_{XY}\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\} = E_{XY}\{XY\} - \mu_X \mu_Y
\end{aligned}$$

Nel caso di variabili casuali discrete si ha:

$$\begin{aligned}
\sigma^2_X &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - \mu_X)^2 p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \mu^2_X \\
\sigma^2_Y &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_j - \mu_Y)^2 p_{ij} = \sum_{j=1}^{m} y_j^2 q_j - \mu^2_Y \\
\sigma_{XY} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - \mu_X)(y_j - \mu_Y) p_{ij}
\end{aligned}$$

Nel caso di variabili casuali continue si ha:

$$\begin{aligned}
\sigma^2_X &= \int\int_{D_{XY}} (x - \mu_X)^2 f_{XY}(x,y) dx\ dy = \int_{D_X} x^2 f_X(x) dx - \mu^2_X \\
\sigma^2_Y &= \int\int_{D_{XY}} (y - \mu_Y)^2 f_{XY}(x,y) dx\ dy = \int_{D_Y} y^2 f_Y(y) dy - \mu^2_Y \\
\sigma_{XY} &= \int\int_{D_{XY}} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f_{XY}(x,y) dx\ dy\ .
\end{aligned}$$

## Trasformazioni di variabili casuali in $\mathbb{R}^n$

Data una variabile casuale $\underline{X} \in \mathbb{R}^n$ e una variabile casuale $\underline{Y} \in \mathbb{R}^m$, legata ad $\underline{X}$ dalla relazione $\underline{Y} = \underline{g}(\underline{X})$:

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(X_1, X_2, \ldots, X_n) \\ g_2(X_1, X_2, \ldots, X_n) \\ \vdots \\ g_m(X_1, X_2, \ldots, X_n) \end{bmatrix}$$

è possibile ricavare la distribuzione di $\underline{Y}$ da quella di $\underline{X}$.

Solo nel caso $m = n$ (e supponendo che $\underline{g}(\underline{X})$ sia regolare) si ha una formula analoga al caso monodimensionale:

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \frac{f_{\underline{X}}(\underline{x})}{|J|}$$

dove $|J|$ è il determinante dello jacobiano, i cui elementi sono: $\left\{ \dfrac{\partial g_k}{\partial X_i} \right\}_{ki}$.

**Teorema (della media):** data una trasformazione di variabili casuali da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, $\underline{Y} = \underline{g}(\underline{X}), (n, m$ qualsiasi) vale la relazione

$$E_{\underline{Y}}\{\underline{Y}\} = E_{\underline{X}}\{\underline{g}(\underline{X})\}$$

## Dipendenza tra le componenti di una variabile casuale

**Definizione:** si definisce indice di correlazione lineare tra le componenti $X$ e $Y$ di una variabile casuale a due dimensioni il coefficiente:

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} .$$

Per tale indice valgono le proprietà:

$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$

| | |
|---|---|
| $\|\rho_{XY}\| = 1$ | se e solo se $Y = aX + b$ è linearmente indipendente da $X$ |
| $\rho_{XY} = 0$ | se $X$ e $Y$ sono stocasticamente indipendenti (non vale il viceversa: $\rho_{XY} = 0$ implica $\sigma_{XY} = 0$, ma non è detto che $X$ e $Y$ siano indipendenti). |

**Definizione:** si definisce curva di regressione della componente $Y$ sulla $X$ l'insieme dei valori $E\{Y|X = x\}$ (medie condizionate) al variare del valore di $X$:

$$\overline{y}(x) = E\{Y|X = x\} \ .$$

Analogamente, la curva di regressione di $X$ su $Y$ è:

$$\overline{x}(y) = E\{X|Y = y\} \ .$$

Per il calcolo delle curve di regressione si ha:

$$\overline{y}(x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j \frac{p_{ij}}{p_i} \qquad i = 1 \dots n \qquad \text{v.c. discreta}$$

$$\overline{y}(x) = \int_{D_Y} y f_{Y|X}(y|x) dy \quad x \in D_X \qquad \text{v.c. continua}$$

**Definizione:** si definisce curva di variabilità della componente $Y$ attorno a $\overline{y}(x)$ l'insieme dei valori $\sigma^2(Y|X = x)$ (varianza condizionata), al variare del valore di $X$:

$$\sigma^2(Y|X = x) = E\{(Y - \overline{y}(x))^2|X = x\} \ .$$

Analogamente, la curva di variabilitá della componente $X$ è:

$$\sigma^2(X|Y = y) = E\{(X - \overline{x}(y))^2|Y = y\} \ .$$

Per il calcolo delle curve di variabilità si ha:

$$\sigma^2(Y|X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} (y_j - \overline{y}(x_i))^2 \frac{p_{ij}}{p_i} \qquad i = 1 \dots n \qquad \text{v.c. discreta}$$

$$\sigma^2(Y|X = x) = \int_{D_Y} (y - \overline{y}(x))^2 f_{Y|X}(y|x) dy \quad x \in D_X \qquad \text{v.c. continu}$$

**Definizione:** si definisce varianza residua $\sigma^2_{R_Y}$ di $Y$ l'indice di dispersione globale della variabile doppia $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ rispetto alla curva $\overline{y}(x)$:

$$\sigma^2_{R_Y} = E_{XY}\{(Y - \overline{y}(x))^2\} = E_X\{\sigma^2(Y|X)\} \ .$$

Analogamente la varianza residua di $X$ è:

$$\sigma^2_{R_X} = E_{XY}\{(X - \overline{x}(y))^2\} = E_Y\{\sigma^2(X|Y)\} \ .$$

**Definizione:** si definisce varianza spiegata $\sigma^2_{S_Y}$ di $Y$ la quantità:

$$\sigma^2_{S_Y} = E\{(\overline{y}(x) - \mu_Y)^2\}$$

e analogamente per $X$:

$$\sigma^2_{S_X} = E\{(\overline{x}(y) - \mu_X)^2\}$$

**Formula di decomposizione degli scarti:** si dimostra che vale la seguente legge di decomposizione degli scarti:

$$\begin{aligned} \sigma^2_Y &= \sigma^2_{R_Y} + \sigma^2_{S_Y} \\ \sigma^2_X &= \sigma^2_{R_X} + \sigma^2_{S_X} \end{aligned}$$

**Definizione:** si definisce indice di Pearson $\eta^2_Y$ il coefficiente:

$$\eta^2_Y = \frac{\sigma^2_{S_Y}}{\sigma^2_Y} = \frac{\sigma^2_{S_Y}}{\sigma^2_{R_Y} + \sigma^2_{S_Y}}$$

Tale indice misura la dipendenza funzionale di $Y$ da $X$.

Analogamente per valutare la dipendenza funzionale di $X$ da $Y$ si puó usare:

$$\eta^2_X = \frac{\sigma^2_{S_X}}{\sigma^2_X} = \frac{\sigma^2_{S_X}}{\sigma^2_{R_X} + \sigma^2_{S_X}}$$

Per l'indice di Pearson valgono le proprietà:

$0 \leq \eta^2_Y \leq 1$

$\eta^2_Y = 1$ se e solo se $Y = g(X)$ (dipendenza funzionale di $Y$ da $X$);

$\eta_Y^2 = 0$ se $X$ e $Y$ sono stocasticamente indipendenti (ma non vale il viceversa).

**Definizione:** per una variabile casuale doppia discreta, si definiscono gli indici di Bonferroni $\beta_0$ e $\beta_1$ (detti indici bilaterali di connessione):

$$\beta_0 = \sqrt{\beta_X \beta_Y}$$
$$\beta_{-1} = \frac{2\beta_X \beta_Y}{\beta_X + \beta_Y}$$

dove $\beta_X$ e $\beta_Y$ (detti indici unilaterali di connessione) sono dati da

$$\beta_X = \frac{C_0}{1 - \sum_i p_i^2} \qquad \beta_Y = \frac{C_0}{1 - \sum_j q_j^2}$$
$$C_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|C_{ij}|$$

avendo definito le contingenze $C_{ij}$

$$C_{ij} = p_{ij} - p_i \cdot q_j \ .$$

Per tali indici valgono le proprietà:

$0 \leq \beta_{-1} \leq \beta_0 \leq 1$

$\beta_0 = \beta_{-1} = 1$ se c'è perfetta dipendenza bilaterale tra $X$ e $Y$;

$\beta_0 = \beta_{-1} = 0$ se $X$ e $Y$ sono stocasticamente indipendenti.

## Variabili statistiche

Una variabile statistica a due dimensioni è una tabella a doppia entrata dove vengono riportate le coppie di risultati $(x_i, y_j)$ di un esperimento stocastico ripetuto $N$ volte, insieme alle frequenze assolute $N_{ij}$ di uscita di ogni coppia:

| $Y$ / $X$ | $y_1$ | $\dots$ | $y_j$ | $\dots$ | $y_m$ | $P_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $N_{11}$ | $\dots$ | $N_{1j}$ | $\dots$ | $N_{1m}$ | $P_1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_i$ | $N_{i1}$ | $\dots$ | $N_{ij}$ | $\dots$ | $N_{im}$ | $P_i$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_n$ | $N_{n1}$ | $\dots$ | $N_{nj}$ | $\dots$ | $N_{nm}$ | $P_n$ |
| $Q_j$ | $Q_1$ | $\dots$ | $Q_j$ | $\dots$ | $Q_m$ | |

dove:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} N_{ij} = N \ .$$

Come nel caso monodimensionale, è possibile usare tutto il formalismo introdotto per le variabili casuali a due dimensioni discrete, riscrivendo la tabella in termini di frequenze relative $f_{ij} = \frac{N_{ij}}{N}$:

| $Y$ / $X$ | $y_1$ | $\dots$ | $y_j$ | $\dots$ | $y_m$ | $p_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $f_{11}$ | $\dots$ | $f_{1j}$ | $\dots$ | $f_{1m}$ | $p_1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_i$ | $f_{i1}$ | $\dots$ | $f_{ij}$ | $\dots$ | $f_{im}$ | $p_i$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_n$ | $f_{n1}$ | $\dots$ | $f_{nj}$ | $\dots$ | $f_{nm}$ | $p_n$ |
| $q_j$ | $q_1$ | $\dots$ | $q_j$ | $\dots$ | $q_m$ | |

dove:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f_{ij} = 1$$

Si possono quindi determinare le distribuzioni marginali e condizionate, le medie $m_X$ e $m_Y$, le varianze $s_X^2, s_Y^2$, le covarianze $s_{XY}$, il coefficiente di correlazione lineare $R_{XY}$ e gli indici di Pearson e di Bonferroni.

# Problemi risolti

## Esercizio 4.1

Dato l'evento casuale "lancio di due monete" (equilibrate) $m_1$ e $m_2$ e associato il valore 0 all'uscita "testa" e 1 a "croce", si considerino le due variabile casuali $X = m_1 + m_2$ e $Y = m_1 \cdot m_2$. Si costruisca la distribuzione di probabilità di $X$, di $Y$ e della variabile casuale doppia $(X, Y)$ e si dica se le due componenti di $(X, Y)$ sono tra loro stocasticamente indipendenti.

**Svolgimento**

Poiché le monete sono equilibrate, la probabilità di uscita di una faccia (0 o 1) è 1/2. L'evento "lancio di due monete" (in modo indipendente l'una dall'altra) può quindi essere descritto dalla seguente tabella di probabilità :

| $m_1$ | $m_2$ | $P(m_1, m_2)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1/4 |
| 0 | 1 | 1/4 |
| 1 | 0 | 1/4 |
| 1 | 1 | 1/4 |

Da questa si possono dedurre valori argomentali e distribuzioni di probabilità per $X$ e per $Y$:

$$X = m_1 + m_2 = \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$Y = m_1 \cdot m_2 = \begin{cases} 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{cases}$$

Per costruire la distribuzione congiunta della variabile casuale $(X, Y)$ non è sufficiente conoscere le distribuzioni, sopra ricavate, delle componenti $X$ e $Y$ (che sono le distribuzioni marginali di $(X, Y)$), ma si deve associare ad ogni coppia di valori $(X, Y)$ la probabilità ripartendo dalla prima tabella.

Per esempio

$$\begin{aligned} P(X=0,Y=0) &= P(m_1=0,m_2=0)=1/4 \\ P(X=0,Y=1) &= \text{ impossibile } =0 \\ P(X=1,Y=0) &= P(m_1=1,m_2=0)+ \\ &+ P(m_1=0,m_2=1)=1/4 + 1/4=1/2 \end{aligned}$$

quindi la distribuzione di $(X,Y)$ è:

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1/4 | 0 |
| 1 | 1/2 | 0 |
| 2 | 0 | 1/4 |

Poiché la distribuzione di probabilità congiunta non coincide con il prodotto delle marginali, $X$ e $Y$ non sono stocasticamente indipendenti.

**Esercizio 4.2**

Completare la seguente distribuzione congiunta della variabile casuale doppia $(X,Y)$, nell'ipotesi di indipendenza stocastica tra $X$ e $Y$:

| $X \backslash Y$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $p_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0.04 | | | |
| $x_2$ | | 0.06 | | 0.10 |
| $x_3$ | | | | |
| $q_j$ | 0.10 | | | |

Sapendo che i valori argomentali di $X$ e $Y$ sono:

$$\begin{aligned} x_i &= 2 \;\; 4 \;\; 6 \\ y_j &= 1 \;\; 3 \;\; 5 \end{aligned}$$

calcolare le medie generali $\mu_X$, $\mu_Y$ e le medie condizionate $\mu_{Y|x_1}$, $\mu_{Y|x_2}$, $\mu_{Y|x_3}$. Ricavare infine la distribuzione della variabile casuale $Z = X - Y$.

**Svolgimento**

Condizione necessaria e sufficiente perché $X$ e $Y$ siano stocasticamente indipendenti tra loro è che la distribuzione congiunta possa essere fattorizzata nel prodotto delle distribuzioni marginali, cioè $p_{ij} = p_i \cdot q_j \ \forall i, j$.

Inoltre, devono valere le condizioni di normalizzazione per le distribuzioni marginali di $X$ e $Y$.

Si possono quindi scrivere le seguenti relazioni:

$$\begin{array}{ll} p_{ij} = p_i \cdot q_j & \forall i, j \\ \sum_{i=1}^{3} p_i = 1 & \sum_{j=1}^{3} q_j = 1 \end{array}$$

che consentono di completare le tabelle a partire dai valori dati.

Si ricava perciò:

$$p_{21} = p_2 \cdot q_1 = 0.1 \cdot 0.1 = 0.01$$

$$q_2 = \frac{p_{22}}{p_2} = \frac{0.06}{0.1} = 0.6$$

$$p_1 = \frac{p_{11}}{q_1} = \frac{0.04}{0.1} = 0.4$$

Si possono quindi completare le marginali e, da queste, calcolare le rimanenti $p_{ij}$ come prodotti:

| $Y$ / $X$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $p_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0.04 | 0.24 | 0.12 | 0.40 |
| $x_2$ | 0.01 | 0.06 | 0.03 | 0.10 |
| $x_3$ | 0.05 | 0.30 | 0.15 | 0.50 |
| $q_j$ | 0.10 | 0.6 | 0.3 | |

Per il calcolo delle medie generali $\mu_X$ e $\mu_Y$ si possono utilizzare direttamente le distribuzioni marginali:

$$\begin{aligned} \mu_X &= \sum_{ij} x_i p_{ij} = \sum_i x_i p_i = 2 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.1 + 6 \cdot 0.5 = 4.2 \\ \mu_Y &= \sum_{ij} y_i p_{ij} = \sum_j y_j q_j = 1 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.6 + 5 \cdot 0.3 = 3.4 \end{aligned}$$

Per il calcolo delle medie di $Y$ condizionate a $X$ si possono ricavare prima le distribuzioni condizionate $(Y|X = x_i) \quad i = 1, 2, 3$ e quindi le medie, per esempio:

$$(Y|X = x_1) = \begin{cases} 1 & 3 & 5 \\ \frac{0.04}{0.4} & \frac{0.24}{0.4} & \frac{0.12}{0.4} \end{cases}$$

$$(Y|X = x_1) = \begin{cases} 1 & 3 & 5 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \end{cases}$$

$$\mu_{Y|X=x_1} = 1 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.6 + 5 \cdot 0.3 = 3.4$$

Oppure si possono calcolare direttamente le $\mu_Y|_{X=x_i}$:

$$\mu_Y|_{X=x_1} = \sum_j y_j \cdot \frac{p_{1j}}{p_1} = \frac{1 \cdot 0.04 + 3 \cdot 0.24 + 5 \cdot 012}{0.04} = 3.4$$

Poiché $X$ e $Y$ sono stocasticamente indipendenti per ipotesi,

$$\frac{p_{ij}}{p_i} = q_j \quad \forall i, j \ ;$$

quindi le distribuzioni condizionate $(Y|X)$ sono tutte identiche alla marginale della $Y$ e in particolare $\mu_{Y|_{x_i}} = \mu_Y, \quad \forall i$.

Per ricavare la distribuzione della variabile casuale

$$Z = X - Y = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

è conveniente prima costruire la tabella dei valori argomentali della $Z$:

| Y / X | 1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|
| 2 | 1 | -1 | -3 |
| 4 | 3 | 1 | -1 |
| 6 | 5 | 3 | 1 |

e sommare quindi le probabilità associate alle diverse combinazioni di valori $X$ e $Y$ (coppie diverse $(x, y)$) che danno lo stesso $z$.

Per esempio:

$$P(Z = 3) = P(X = 4, Y = 1) + P(X = 6, Y = 3) = 0.01 + 0.3 = 0.31 \ .$$

Si trova quindi la distribuzione:

$$Z = \begin{cases} -3 & -1 & 1 & 3 & 5 \\ 0.12 & 0.27 & 0.25 & 0.31 & 0.05 \end{cases}$$

**Esercizio 4.3**

Data la variabile doppia discreta $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$:

| Y / X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.15 | 0.25 | 0.20 |
| 2 | 0.05 | 0.12 | 0.23 |

a) determinare le distribuzioni marginali, le medie e la matrice di covarianza $C_{XY}$;

b) determinare le distribuzioni condizionate di $(Y|X)$ e di $(X|Y)$;

c) calcolare l'indice di correlazione lineare $\rho_{XY}$;

d) calcolare la probabilità $P\left( Y > \frac{1}{X} \right)$;

e) trovare media e varianza della variabile $Z = X + 2Y$.

**Svolgimento**

a) Le distribuzioni marginali sono date da:

$$X = \begin{cases} 1 & 2 \\ 0.6 & 0.4 \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.37 & 0.43 \end{cases}$$

Per le medie $\mu_X$ e $\mu_Y$ si ha:

$$\mu_X = 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.4 = 1.4$$
$$\mu_Y = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.37 + 2 \cdot 0.43 = 1.23$$

Gli elementi della matrice di covarianza sono dati da:

$$\sigma_X^2 = E\{X^2\} - \mu_X^2 = 1 \cdot 0.6 + 4 \cdot 0.4 - (1.4)^2 = 0.24$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_Y^2 &= E\{Y^2\} - \mu_Y^2 = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.37 + 4 \cdot 0.43 - (1.23)^2 = 0.5771 \\
\sigma_{XY} &= E\{XY\} - \mu_X \mu_Y = \sum_{ij} x_i y_j p_{ij} - \mu_X \mu_Y = \\
&= 0 \cdot 1 \cdot 0.15 + 0 \cdot 2 \cdot 0.05 + 1 \cdot 1 \cdot 0.25 + 1 \cdot 2 \cdot 0.12 + 2 \cdot 1 \cdot 0.2 + \\
&\quad +2 \cdot 2 \cdot 0.23 - 1.4 \cdot 1.23 = \\
&= 1.81 - 1.4 \cdot 1.23 = 0.088
\end{aligned}
$$

b) Le distribuzioni condizionate sono:

$$
(Y|X=1) = \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ 0.250 & 0.417 & 0.333 \end{cases}
$$

$$
(Y|X=2) = \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ 0.125 & 0.300 & 0.575 \end{cases}
$$

$$
(X|Y=0) = \begin{cases} 1 & 2 \\ 0.750 & 0.250 \end{cases}
$$

$$
(X|Y=1) = \begin{cases} 1 & 2 \\ 0.676 & 0.324 \end{cases}
$$

$$
(X|Y=2) = \begin{cases} 1 & 2 \\ 0.465 & 0.535 \end{cases}
$$

c) Per il coefficiente di correlazione lineare si ha:

$$
\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{0.088}{\sqrt{0.24 \cdot 0.5771}} = 0.2365
$$

d) La probabilità richiesta è data da:

$$
\begin{aligned}
P(Y > 1/X) &= P(X=1, Y=2) + P(X=2, Y=1) + \\
&\quad + P(X=2, Y=2) = 0.2 + 0.12 + 0.23 = 0.55
\end{aligned}
$$

e) La variabile casuale:

$$
Z = X + 2Y = [1 \;\; 2] \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}
$$

ha i valori argomentali riportati in tabella:

| $Y$ / $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 5 |
| 2 | 2 | 4 | 6 |

Dalla tabella si ricava quindi la distribuzione di $Z$:

$$Z = \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.15 & 0.05 & 0.25 & 0.12 & 0.2 & 0.23 \end{cases}$$

Applicando ora le consuete definizioni di media e varianza si ottengono i valori:

$$\mu_Z = 3.86$$
$$\sigma_Z^2 = 17.8 - (3.86)^2 = 2.9004$$

**Esercizio 4.4**

Data la variabile casuale doppia discreta

| $Y$ / $X$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.3 | 0.0 | 0.2 |
| 1 | 0.2 | 0.1 | 0.2 |

a) calcolare $\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2$;

b) determinare la curva di regressione e la curva di variabilità della $Y$ sulla $X$;

c) calcolare l'indice di Pearson $\eta_Y^2$:

d) dare la distribuzione della variabile casuale $U = Y + X$.

**Svolgimento**

a) Medie e varianze sono date da:

$$\mu_X = 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5 = 0.5$$
$$\mu_Y = -1 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.4 = -0.1$$
$$\sigma_X^2 = 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5 - (0.5)^2 = 0.25$$
$$\sigma_Y^2 = 1 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.4 - (-0.1)^2 = 0.89$$

b) Per calcolare la curva di regressione e di variabilità si calcolano dapprima le distribuzioni condizionate $Y|X$:

$$(Y|X=0) = \begin{cases} -1 & 0 & 1 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \end{cases}$$

$$(Y|X=1) = \begin{cases} -1 & 0 & 1 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{cases}$$

La curva di regressione $\overline{y}(x) = \mu_{Y|X}$ è costituita da due valori:

$$\begin{aligned} \overline{y}(X=0) = & \ -1 \cdot 0.6 + 1 \cdot 0.4 = -0.2 \\ \overline{y}(X=1) = & \ -1 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.4 = 0.0 \end{aligned}$$

Anche la curva di variabilità è costituita da due soli valori:

$$\begin{aligned} \sigma^2(Y|X=0) = & \ 1 \cdot 0.6 + 1 \cdot 0.4 - (0.2)^2 = 0.96 \\ \sigma^2(Y|X=1) = & \ 1 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.4 - (0)^2 = 0.8 \end{aligned}$$

c) L'indice di Pearson di $Y$ è:

$$\eta_Y^2 = \frac{\sigma_{SY}^2}{\sigma_Y^2}$$

dove la varianza "spiegata" $\sigma_{SY}^2$ è data da:

$$\begin{aligned} \sigma_{SY}^2 &= \sum_{i=1}^{n} (\mu_{Y|X_i} - \mu_Y)^2 \cdot p_i = \\ &= (-0.2 + 0.1)^2 \cdot 0.5 + (0 + 0.1)^2 \cdot 0.5 = 0.01 \ . \end{aligned}$$

Quindi risulta:

$$\eta_Y^2 = \frac{0.01}{0.89} = 0.0112$$

d) I valori argomentali di $U$ sono:

| $Y$ \ $X$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| 0 | -1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |

e la distribuzione è:

$$U = \begin{cases} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 & 0.2 \end{cases}$$

**Esercizio 4.5**

Calcolare gli indici di Pearson $\eta_X^2, \eta_Y^2$, il coefficiente di correlazione lineare $\rho_{XY}$ e l'indice di Bonferroni $\beta_0$ per la seguente variabile casuale doppia:

| Y / X | 2 | 4 | 6 | $p_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.3 |
| 2 | 0.1 | 0.2 | 0.1 | 0.4 |
| 3 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.3 |
| $q_j$ | 0.3 | 0.4 | 0.3 | |

**Svolgimento**

Gli indici di Pearson sono dati da:

$$\eta_X^2 = \frac{\sum_j (\mu_{X|y_j} - \mu_X)^2 \cdot q_j}{\sigma_X^2}$$

$$\eta_Y^2 = \frac{\sum_i (\mu_{Y|x_i} - \mu_Y)^2 \cdot p_i}{\sigma_Y^2}$$

Occorrono quindi le medie, le varianze generali e le medie condizionate di $X$ e di $Y$:

$$\mu_X = 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.3 = 2$$

$$\mu_Y = 2 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.4 + 6 \cdot 0.3 = 4$$

$$\sigma_X^2 = \sum_i x_i^2 p_i - \mu_X^2 = 0.6$$

$$\sigma_Y^2 = \sum_j y_j^2 q_j - \mu_Y^2 = 2.4$$

$$\mu_{X|Y=2} = \frac{1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.1}{0.3} = 2$$

$$\mu_{X|Y=6} = 2$$

$$\mu_{X|Y=4} = \frac{1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.1}{0.4} = 2$$

$$\mu_{Y|X=1} = \mu_{Y|X=3} = 4$$

$$\mu_{Y|X=2} = 4$$

Si noti che le medie condizionate sono costanti, ma le componenti $X, Y$ non sono stocasticamente indipendenti.

Si trova quindi:

$$\eta_X^2 = 0 \qquad (\mu_{X|y_j} - \mu_X = 0 \ \forall j)$$

$$\eta_Y^2 = 0 \qquad (\mu_{Y|x_i} - \mu_Y = 0 \ \forall i)$$

Il coefficiente di correlazione $\rho_{XY}$ è nullo, essendo la covarianza:

$$\begin{aligned} \sigma_{XY} &= 2 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.1 + 6 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.1 + 8 \cdot 0.2 + 12 \cdot 0.1 + \\ &\quad +6 \cdot 0.1 + 12 \cdot 0.1 + 18 \cdot 0.1 - 4 \cdot 2 = 8 - 8 = 0 \end{aligned}$$

L'indice di Bonferroni è $\beta_0 = \sqrt{\beta_X \beta_Y}$ con

$$\beta_X = \frac{\frac{1}{2}\sum_{ij}|c_{ij}|}{1 - \sum_i p_i^2} \qquad \beta_Y = \frac{\frac{1}{2}\sum_{ij}|c_{ij}|}{1 - \sum_j q_j^2}$$

dove $c_{ij} = p_{ij} - p_i \cdot q_j$ sono gli elementi della tabella delle contingenze

$$C = \begin{bmatrix} 0.01 & -0.02 & 0.01 \\ -0.02 & 0.04 & -0.02 \\ 0.01 & -0.02 & 0.01 \end{bmatrix}$$

Poiché:

$$c_0 = \frac{1}{2}\sum_{ij}|c_{ij}| = \frac{1}{2} \cdot 0.16 = 0.08$$

e

$$\sum_i p_i^2 = 0.34$$
$$\sum_j q_j^2 = 0.34$$

si ha:

$$\beta_X = \frac{0.08}{1-0.34} = 0.\overline{12}$$
$$\beta_Y = \frac{0.08}{1-0.34} = 0.\overline{12}$$

e quindi:

$$\beta_0 = \sqrt{0.\overline{12} \cdot 0.\overline{12}} = 0.\overline{12}$$

**Esercizio 4.6**

In tabella si riportano l'altezza e il diametro (in cm) del fusto di 30 piante cresciute in un vivaio per un anno:

| $h$ / $d$ | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 8 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 10 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 12 | 3 | 1 | 1 | 1 | 0 |

a) calcolare le medie condizionate $m_{h|d}$ e $m_{d|h}$, le medie generali di $d$ e di $h$, $m_d$ e $m_h$, e le rispettive varianze $s_d^2, s_h^2$;

b) calcolare inoltre il coefficiente di correlazione lineare $R_{dh}$.

**Svolgimento**

Il numero totale di piante esaminate è 30, si può quindi riscrivere la tabella in termini di frequenze relative:

| $h$ / $d$ | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | $p_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 0.00 | $0.0\overline{3}$ | $0.0\overline{3}$ | $0.0\overline{3}$ | $0.0\overline{6}$ | $0.1\overline{6}$ |
| 8 | $0.0\overline{6}$ | $0.0\overline{6}$ | 0.10 | $0.0\overline{6}$ | 0.10 | 0.40 |
| 10 | $0.0\overline{3}$ | $0.0\overline{3}$ | $0.0\overline{6}$ | $0.0\overline{3}$ | $0.0\overline{6}$ | $0.2\overline{3}$ |
| 12 | 0.10 | $0.0\overline{3}$ | $0.0\overline{3}$ | $0.0\overline{3}$ | 0.00 | 0.20 |
| $q_j$ | 0.2 | $0.1\overline{6}$ | $0.2\overline{3}$ | $0.1\overline{6}$ | $0.2\overline{3}$ | |

ed effettuare tutti i calcoli di medie e varianze campionarie come per le corrispondenti quantità teoriche di una variabile casuale doppia discreta.

È anche possibile effettuare i calcoli usando le frequenze assolute:

| $h$ / $d$ | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | $P_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 5 |
| 8 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 12 |
| 10 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 7 |
| 12 | 3 | 1 | 1 | 1 | 0 | 6 |
| $Q_j$ | 6 | 5 | 7 | 5 | 7 | 30 |

Per le medie si ha:

$$m_d = \frac{1}{30}(6 \cdot 5 + 8 \cdot 12 + 10 \cdot 7 + 12 \cdot 6) = 8.9\overline{3}$$

$$m_h = \frac{1}{30}(40 \cdot 6 + 50 \cdot 5 + 60 \cdot 7 + 70 \cdot 5 + 80 \cdot 7) = 60.\overline{6}$$

Con calcoli analoghi si trovano le varianze:

$$s_d^2 = 83.73298 - (8.9\overline{3})^2 = 3.9888$$
$$s_h^2 = 3886.\overline{6} - (60.\overline{6})^2 = 206.2223$$

Anche per il calcolo delle medie condizionate si può usare la tabella delle frequenze relative, ad esempio:

$$m_{d|h=40} = \frac{6 \cdot 0 + 8 \cdot 0.0\overline{6} + 10 \cdot 0.0\overline{3} + 12 \cdot 0.1}{0.2} = 10.3333$$

oppure quella delle frequenze assolute, ad esempio:

$$m_{d|h=50} = \frac{6 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 10 \cdot 1 + 12 \cdot 1}{5} = 8.8$$

Si trovano i valori:

| $h$ | $m_{d\|h}$ |
|---|---|
| 40 | $10.\overline{3}$ |
| 50 | 8.8 |
| 60 | 8.857 |
| 70 | 8.8 |
| 80 | 8.0 |

| $d$ | $m_{h\|d}$ |
|---|---|
| 6 | 68.0 |
| 8 | $61.\overline{6}$ |
| 10 | 62.86 |
| 12 | 50.0 |

Il coefficiente di correlazione campionario è:

$$R_{dh} = \frac{s_{dh}}{s_d s_h} = \frac{-9.955476}{1.9970 \cdot 14.3604} = -0.34715$$

### Esercizio 4.7

Data la variabile statistica doppia rappresentata dalle coppie di valori:

(2.3, 5.3) (5.5, 30.3) (1.1, 1.2) (4.2, 17.7) (3.0, 9.1)

calcolare coefficiente di correlazione lineare e curve di regressione e di variabilità di $Y$ su $X$.

**Svolgimento**

La variabile statistica è data in forma di coppie $(X, Y)$ e in questo caso ad un valore di $X$ corrisponde un solo valore di $Y$, si possono quindi usare le seguenti formule:

$$m_X = \frac{1}{5}\sum_i x_i = \frac{1}{5} \cdot 16.1 = 3.22$$

$$m_Y = \frac{1}{5}\sum_i y_i = \frac{1}{5} \cdot 63.6 = 12.72$$

$$E\{X^2\} = \frac{1}{5}\sum_i x_i^2 = \frac{1}{5} \cdot 63.39 = 12.678$$

$$E\{Y^2\} = \frac{1}{5}\sum_i y_i^2 = \frac{1}{5} \cdot 1343.72 = 268.744$$

$$s_X^2 = 12.678 - m_X^2 = 2.3096$$
$$s_X = 1.519737$$

$$s_Y^2 = 268.744 - m_Y^2 = 106.9456$$
$$s_Y = 10.341451$$

$$s_{XY} = \frac{1}{5}\sum_i x_i y_i - m_X m_Y = \frac{1}{5} \cdot 281.8 - m_X m_Y = 15.4016$$

$$R_{XY} = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y} = 0.979977$$

Per determinare le curve di regressione e di variabilità è conveniente costruire la tabella a doppia entrata delle frequenze relative $f_{ij}$.

| $Y$ / $X$ | 1.2 | 5.3 | 9.1 | 17.7 | 30.3 | $p_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.1 | 1/5 | | | | | 1/5 |
| 2.3 | | 1/5 | | | | 1/5 |
| 3.0 | | | 1/5 | | | 1/5 |
| 4.2 | | | | 1/5 | | 1/5 |
| 5.5 | | | | | 1/5 | 1/5 |
| $q_j$ | 1/5 | 1/5 | 1/5 | 1/5 | 1/5 | 1 |

È semplice quindi determinare $\overline{y}(x) = m_{Y|X}$ poiché dalla definizione:

$$\overline{y}(x_i) = \sum_{j=1}^{5} y_j \frac{f_{ij}}{p_i} \qquad i = 1, \ldots, 5$$

e, per come è fatta la tabella, in questo caso si ha:

$$\overline{y}(x_i) = y_i \qquad i = 1, \ldots, 5$$

Quindi:

| $X$ | $m_{Y\|X}$ |
|---|---|
| 1.1 | 1.2 |
| 2.3 | 5.3 |
| 3.0 | 9.1 |
| 4.2 | 17.7 |
| 5.5 | 30.3 |

Per il calcolo della curva di variabilitá si ha:

$$\sigma^2(Y|X = x_i) = \sum_{j=1}^{5}(y_j - \overline{y}(x_i))^2 \frac{f_{ij}}{p_i} = (y_i - \overline{y}(x_i))^2 \cdot 1 = 0 \quad i = 1, \ldots, 5$$

perché ad ogni valore di $X$ corrisponde un solo valore di $Y$, cioè non c'è variabilità attorno ad ogni $m_{Y|X}$.

**Esercizio 4.8**

Si sono rilevati il colore dei capelli ($X$) e degli occhi ($Y$) di 100 persone, ottenendo i seguenti risultati:

| $Y$ / $X$ | Marroni | Neri | Azzurri | $p_i$ |
|---|---|---|---|---|
| Biondi | | | 0.2 | 0.2 |
| Castani | 0.4 | | | 0.4 |
| Neri | | 0.3 | | 0.3 |
| Rossi | 0.1 | | | 0.1 |
| $q_j$ | 0.5 | 0.3 | 0.2 | 1.0 |

calcolare gli indici di Bonferroni $\beta_0$ e $\beta_{-1}$.

**Svolgimento**

Gli indici di Bonferroni $\beta_0$ e $\beta_{-1}$ sono:

$$\beta_0 = \sqrt{\beta_X \beta_Y} \quad \text{e} \quad \beta_{-1} = \frac{2\beta_X \beta_Y}{\beta_X + \beta_Y}$$

dove

$$\beta_X = \frac{1/2\sum_{ij}|c_{ij}|}{1-\sum_i p_i^2} \qquad \beta_Y = \frac{1/2\sum_{ij}|c_{ij}|}{1-\sum_j q_j^2}$$

essendo $c_{ij}$ le contingenze: $c_{ij} = p_{ij} - p_i \cdot q_j$.

La tabella delle contingenze è data da:

$$C = \begin{bmatrix} -0.10 & -0.06 & 0.16 \\ 0.20 & -0.12 & -0.08 \\ -0.15 & 0.21 & -0.06 \\ 0.05 & -0.03 & -0.02 \end{bmatrix}$$

Quindi $\sum_{ij}|c_{ij}| = 1.24$.

Inoltre:

$$\sum_i p_i^2 = 0.3$$
$$\sum_j q_j^2 = 0.38 \; .$$

Si ha:

$$\beta_X = \frac{0.62}{1-0.3} = 0.8857 \qquad \beta_Y = \frac{0.62}{1-0.38} = 1$$

e da questi si ricava

$$\beta_0 = \sqrt{0.8857} = 0.9411 \qquad \beta_{-1} = \frac{2 \cdot 0.8857}{1+0.8857} = 0.9394$$

### Esercizio 4.9

Data la funzione di distribuzione

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2+y^2+x^2y^2)} \quad \text{con } x, y \in \mathbb{R}$$

a) si dimostri che $X$ e $Y$ sono indipendenti;

b) si trovi la probabilità $P(X > Y)$ (si ragioni sulla simmetria della distribuzione rispetto ad una inversione di assi);

c) si calcoli $P(Q)$ dove $Q$ è il quadrato:

$$Q = \{-1 \leq X \leq 1 \quad , \quad -1 \leq Y \leq 1\}$$

**Svolgimento**

a) Poiché:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+y^2)} \; \frac{1}{(1+x^2)} dy = \\ &= \frac{1}{\pi^2(1+x^2)} [\arctan y]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \end{aligned}$$

ed analogamente:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

si ha:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} = f_X \cdot f_Y$$

che è la condizione necessaria e sufficiente per l'indipendenza stocastica delle variabili $X$ e $Y$.

b) La funzione $f_{XY}(x,y)$ è simmetrica rispetto a uno scambio di $x$ con $y$, oppure di $x$ con $-x$, oppure di $y$ con $-y$, cioè anche rispetto alla bisettrice del I e III quadrante $y = x$.

Poiché $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx\ dy = 1$, l'integrale sul semipiano vale $1/2$.

Per esteso:

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{y}^{+\infty} dx \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} = \\ &= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+y^2)} \left(\int_{y}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx\right) dy = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}[\arctan x]_y^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2} = \\
&= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan y\right)\cdot\frac{dy}{1+y^2} \\
&= \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{2}[\arctan y]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} z\, dz = \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

(avendo sostituito $z = \arctan y, \quad dz = \dfrac{dy}{1+y^2}$).

c) La probabilità richiesta è data da:

$$
\begin{aligned}
P(Q) &= \int_{-1}^{+1}dx\int_{-1}^{+1}dy f_{XY}(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}\frac{1}{1+x^2}dx\int_{-1}^{+1}\frac{1}{1+y^2}dy = \\
&= \frac{1}{\pi^2}\left([\arctan x]_{-1}^{+1}[\arctan y]_{-1}^{+1}\right) = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}\,.
\end{aligned}
$$

### Esercizio 4.10

Un pendolare si reca al lavoro utilizzando due mezzi $X$ e $Y$ i cui rispettivi tempi d'attesa hanno densità di probabilità della forma:

$$
f_X(x) = \alpha e^{-\alpha x} \qquad f_Y(y) = \beta e^{-\beta y} \qquad x, y \geq 0\,.
$$

a) Determinare la densità di probabilità del tempo speso aspettando, cioè $Z = X + Y$;

b) posto $\alpha = 0.14$ min$^{-1}$ e $\beta = 0.08$ min$^{-1}$, calcolare la probabilità che il tempo complessivo di attesa sia maggiore di 10 minuti.

### Svolgimento

a) Si può supporre che le due variabili $X$ e $Y$, cioè i tempi di attesa dei due mezzi, siano indipendenti.

In tal caso la densità di probabilità della $Z$ può essere scritta come integrale di convoluzione:

$$
f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(z-y, y)dy
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy \\
f_X(z-y) &= \alpha e^{-(z-y)\alpha} \\
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \beta\alpha e^{-(z-y)\alpha} e^{-\beta y} dy
\end{aligned}
$$

Per calcolare l'integrale si devono considerare gli intervalli in cui $f_Y$ e $f_X$ sono entrambe diverse da 0. Il primo estremo di integrazione è nullo, poiché $f_Y = 0$ per $y < 0$; inoltre $f_X = 0$ per $x < 0$, quindi $f_X(z-y) = 0$ per $z - y < 0$, cioè per $z < y$.

Quindi:

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_0^z \beta\alpha e^{-\alpha z} e^{+\alpha y} e^{-\beta y} dy = \\
&= \beta\alpha e^{-\alpha z} \int_0^z e^{(\alpha-\beta)y} dy = \frac{\beta\alpha}{\alpha-\beta} e^{-\alpha z}(e^{(\alpha-\beta)z} - 1) = \\
&= \frac{\beta\alpha}{\alpha-\beta}(e^{-\beta z} - e^{-\alpha z})
\end{aligned}
$$

b) Se $\alpha = 0.14 \quad \beta = 0.08$

$$
\begin{aligned}
P(Z > 10 \text{ min}) &= \int_{10}^{+\infty} \frac{0.14 \cdot 0.08}{0.14 - 0.08}(e^{-0.08z} - e^{-0.14z}) dz = \\
&= \frac{-0.14}{0.14 - 0.08}\left[e^{-0.08z}\right]_{10}^{+\infty} + \frac{0.08}{0.14 - 0.08}\left[e^{-0.14z}\right]_{10}^{+\infty} = \\
&= 1.048434 - 0.328796 = 0.719633
\end{aligned}
$$

Verifica:

$$
\begin{aligned}
P(Z < 10 \text{ min}) &= \int_0^{10} \frac{\beta\alpha}{\alpha-\beta}(e^{-\beta z} - e^{-\alpha z}) dz = \\
&= \frac{-\alpha}{\alpha-\beta}\left[e^{-\beta z}\right]_0^{10} + \frac{\beta}{\alpha-\beta}\left[e^{-\alpha z}\right]_0^{10} = \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\left\{-\alpha e^{-10\cdot\beta} + \alpha + \beta e^{-10\cdot\alpha} - \beta\right\} = \\
&= \frac{\beta e^{-10\alpha} - \alpha e^{-10\beta}}{\alpha-\beta} + 1 = 0.280362
\end{aligned}
$$

La probabilità per il pendolare di attendere più di 10 minuti è pari al 72%.

**Esercizio 4.11**

La variabile casuale $Z$ è definita come funzione della variabile casuale doppia $(X, Y)$ secondo la legge

$$Z = e^{-(X^2+Y^2)} ;$$

la variabile $(X, Y)$ è a sua volta uniforme all'interno della circonferenza di equazione:

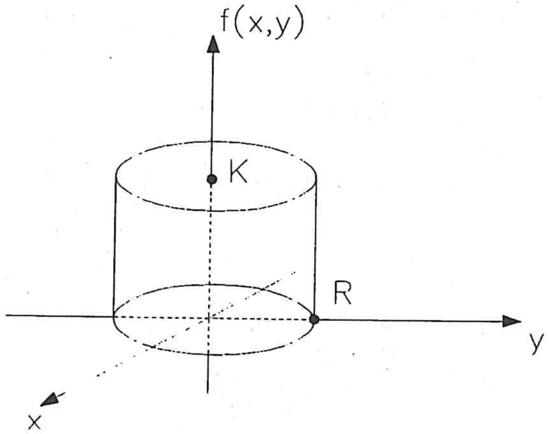
$$x^2 + y^2 = R^2 .$$

Si determini dapprima la funzione di distribuzione e poi la densità di probabilità di $Z$ (si consiglia di definire a priori il supporto di $Z$).

**Svolgimento**

La variabile casuale $(X, Y)$ ha distribuzione

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} K & x^2 + y^2 \leq R^2 \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$




dove $K$ è tale che $K \cdot 4\pi R^2 = 1$, quindi $K = \dfrac{1}{4\pi R^2}$.

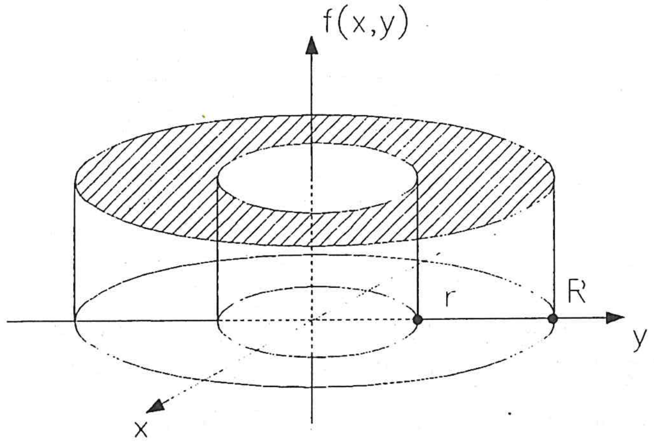
La funzione di distribuzione è:

$$F_Z(\overline{z}) = P(Z \leq \overline{z}) = P(e^{-(x^2+y^2)} \leq \overline{z}) = P((x^2 + y^2) \geq -\ln \overline{z}) ;$$

ma

$$P((x^2+y^2) \geq r^2) = \iint_B f_{XY}(x,y)dx\ dy$$

è uguale al volume compreso tra i due cilindri di raggi $r$ ed $R$, essendo $B$ la base del solido e $K$ l'altezza, che può essere facilmente trovato per via geometrica:



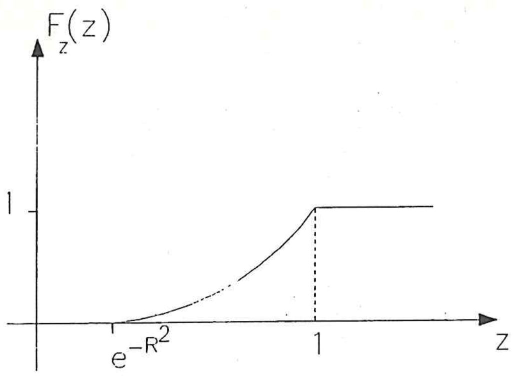

$$V(R) - V(r) = 1 - 4\pi r^2 \cdot K = 1 - \frac{r^2}{R^2}\ .$$

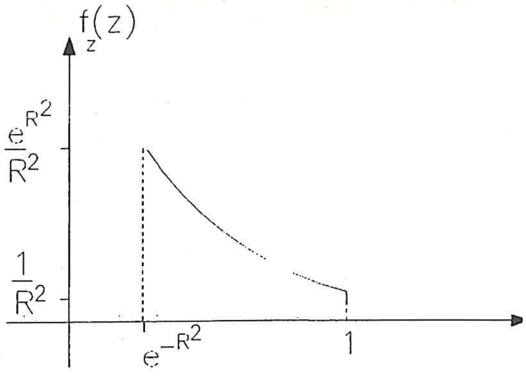
Essendo inoltre $r^2 = -\ln z$ si trova:

$$F_Z(z) = 1 + \frac{\ln z}{R^2} \quad \text{con} \quad e^{-R^2} \leq z \leq 1$$

La densitá di probabilità è:

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{1}{z}$$



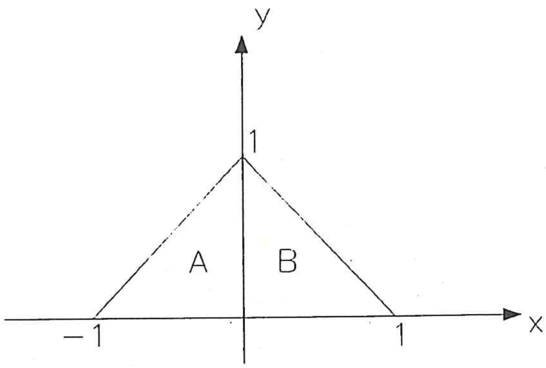

**Esercizio 4.12**

Data la variabile casuale doppia $(X, Y)$ continua, con densità di probabilità $f_{XY}(x, y)$ uniforme sul dominio in figura $T = A \cup B$, calcolare:

a) le distribuzioni marginali $f_X(x), f_Y(y)$ e condizionate $f_{X|Y}$, $f_{Y|X}$;

b) le medie $\mu_X, \mu_Y$, le varianze $\sigma_X^2, \sigma_Y^2$ e la covarianza $\sigma_{XY}$;

c) il coefficiente di correlazione lineare $\rho_{XY}$ e le curve di regressione e di variabilità $\overline{y}(x)$ e $\sigma^2(Y|X)$.




**Svolgimento**

La variabile casuale $(X, Y)$ ha distribuzione

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} K & (x, y) \in T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$K$ viene determinato con la condizione di normalizzazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx\ dy = 1$$

In questo caso:

$$\int_0^1 dy \int_r^s K dx \equiv 1$$

dove $r$ ed $s$ sono le rette che delimitano il dominio $T$:

$$\begin{aligned} r: &\quad y = x + 1 \\ s: &\quad y = 1 - x\ . \end{aligned}$$

Si ha:

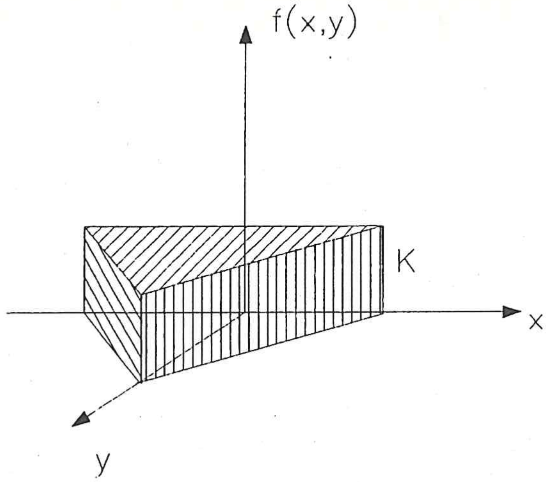
$$\begin{aligned} 1 &\equiv \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} K dx = K \int_0^1 dy [x]_{y-1}^{1-y} = K \int_0^1 (2 - 2y) dy = \\ &= 2K [y - \frac{y^2}{2}]_0^1 = K \quad \Rightarrow \quad K = 1 \end{aligned}$$

Si noti che è possibile invertire l'ordine di integrazione, ma in questo caso il calcolo diventa più complicato:

$$1 \equiv \int_{-1}^{0} dx \int_0^{x+1} K\ dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} K dy\ ;$$

quindi è sempre conveniente valutare, in funzione del dominio, in quale ordine conviene effettuare gli integrali doppi.

È anche utile ricordare il significato geometrico della condizione di normalizzazione: l'integrale che dá tale condizione rappresenta il volume del prisma di altezza $K$ e base $T$.




Quindi:

$$
\begin{aligned}
&V = T \cdot K \equiv 1 \\
&\frac{2 \cdot 1}{2} \cdot K = 1 \Rightarrow K = 1 \\
&f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1 & (y-1) \leq x \leq (1-y) \qquad 0 \leq y \leq 1 \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}
\end{aligned}
$$

a) Le distribuzioni marginali sono date da:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx$$

Per $f_X(x)$ occorre trovare i limiti del dominio in $y$ dividendo nelle due regioni $A$ e $B$:

$$\text{in A:}\ \ f_X(x) = \int_0^{x+1} K \cdot dy = \int_0^{x+1} 1 \cdot dy = [y]_0^{x+1} = x+1$$

$$\text{in B:}\ \ f_X(x) = \int_0^{1-x} 1 \cdot dy = 1 - x$$

Quindi la marginale è $f_X(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

Per $f_Y(y)$ si può considerare tutto il dominio contemporaneamente:

$$f_Y(y) = \int_{y-1}^{1-y} K\, dx = 1 - y - y + 1 = \begin{cases} 2(1-y) & \text{per } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Per le distribuzioni condizionate:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \qquad f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

si ha:

$$f_{Y|X} = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & -1 \le x \le 0\,,\ 0 \le y \le 1+x \\ \frac{1}{1-x} & 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 1-x \end{cases}$$

$$f_{X|Y} = \frac{1}{2(1-y)} \qquad 0 \le y \le 1\,,\ y-1 \le x \le 1-y$$

b) Le medie della variabile casuale $(X, Y)$ sono date da:

$$\begin{aligned} \mu_X &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx = \int_{-1}^{0} x \cdot (x+1) dx + \int_0^1 x(1-x) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 0 \end{aligned}$$

(come è evidente per simmetria)

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y) dy = \int_0^1 y \cdot 2(1-y) dy = \\ &= 2\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Mentre per le varianze e la covarianza si ha:

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx - \mu_X^2 = \int_{-1}^{0} x^2(x+1) dx + \int_0^1 x^2(1-x) dx - 0 = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_Y^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y) dy - \mu_Y^2 = \int_0^1 2y^2(1-y)dy - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \\
&= 2\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 - \frac{1}{9} = \frac{1}{18} \\
\sigma_{XY} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \cdot f_{XY} dx\; dy - \mu_X \mu_Y = \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} x \cdot y \cdot dx = \\
&= \int_0^1 y \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_{y-1}^{1-y} dy = 0
\end{aligned}$$

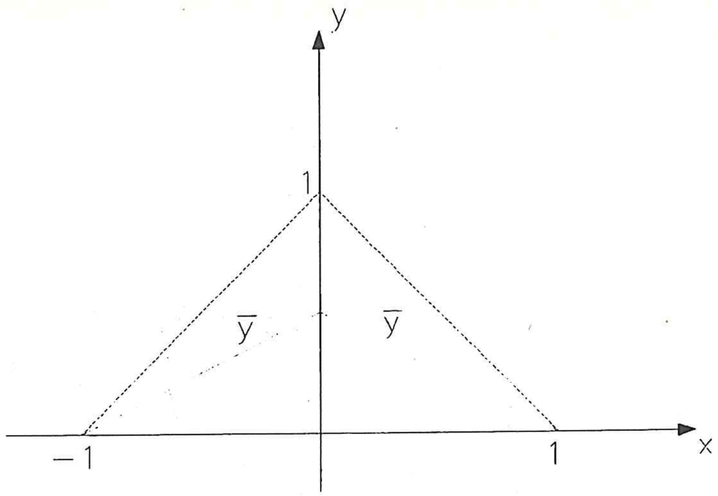
c) Poiché $\sigma_{XY} = 0$, è anche $\rho_{XY} = 0$, quindi $X$ e $Y$ sono incorrelate (ma è possibile verificare che non sono indipendenti).

La curva di regressione della $Y$ sulla $X$ è:

$$\overline{y}(x) = E\{Y|X = x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y\; f_{Y|X}(y|x) dy$$

$$\text{in } A : \overline{y}(x) = \int_0^{1+x} \frac{y}{1+x} dy = \frac{1}{1+x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1+x} = \frac{1+x}{2}$$

$$\text{in } B : \overline{y}(x) = \int_0^{1-x} \frac{y}{1-x} dy = \frac{1}{1-x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} = \frac{1-x}{2}$$




Curva di variabilità di $Y$ attorno $\overline{y}(x)$:

$$\sigma^2(Y|X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \overline{y}(x))^2 \cdot f_{Y|X} dy$$

in $A$ : $\quad \sigma^2(Y|X) = \displaystyle\int_0^{1+x} \left(y - \frac{1+x}{2}\right)^2 \frac{1}{1+x} dy =$

$$= \int_0^{1+x} (y^2 - y(1+x) + \frac{1}{4}(1+x)^2) \frac{1}{1+x} dy =$$

$$= \frac{1}{1+x} \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{1+x} - \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1+x} + \frac{(1+x)}{4}[y]_0^{1+x} =$$

$$= \frac{1}{3}(1+x)^2 - \frac{1}{2}(1+x)^2 + \frac{1}{4}(1+x)^2 = \frac{1}{12}(1+x)^2$$

in $B$ : $\quad \sigma^2(Y|X) = \displaystyle\int_0^{1-x} \left(y - \frac{1-x}{2}\right)^2 \frac{1}{1-x} dy =$

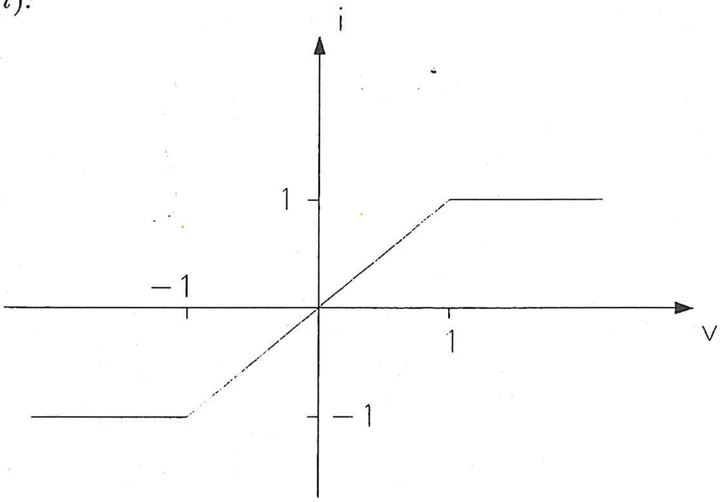
$$= \int_0^{1-x} (y^2 - y(1-x) + \frac{1}{4}(1-x)^2) \frac{1}{1-x} dy =$$

$$= \frac{1}{1-x} \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} - \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} + \frac{1}{4}(1-x)[y]_0^{1-x} =$$

$$= \frac{1}{12}(1-x)^2$$

**Esercizio 4.13**

Un circuito a relé presenta la seguente curva caratteristica tensione ($v$)-corrente ($i$):




Se $v$ è una variabile casuale normale standard, qual è la distribuzione della corrente $i$?

**Svolgimento**

La funzione densitá di probabilità di $v$ è:

$$f_V(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}.$$

Dal grafico si ha

$$\begin{array}{ll} i = v & -1 \leq v \leq 1 \\ i = -1 & v < -1 \\ i = 1 & v > 1 \end{array}$$

Ragionando in termini di $F(i) = P(i < \bar{i})$ si ha quindi

$$P(i < -1) = 0$$
$$P(i < 1 + k) = 1$$

dove $k$ è qualsiasi valore positivo.

$P(i < \bar{i})$ con $\bar{i} \in [-1, 1]$ è data da

$$P(i < \bar{i}) = P(v < \bar{v} = \bar{i}) = \int_{-\infty}^{\bar{v}} f_V(v)\, dv$$

che equivale a usare la formula per traformazioni di variabili casuali $f_I(i) = \dfrac{f_V(v)}{|g'|}$ con $i = g(v) = v$.

Quindi:

$$f_I(i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{i^2}{2}} \;,\; -1 < i < 1 \;.$$

A parte vanno calcolati i valori in $i = 1$ e $i = -1$:

$$\begin{aligned} P(i = -1) &= \int_{-\infty}^{-1} f_V(v) dv \\ P(i = 1) &= \int_{1}^{+\infty} f_V(v) dv \end{aligned}$$

con l'aiuto delle tavole della normale standardizzata (Tab. 2) si trova

$$P(i = -1) = P(i = 1) = 0.1587$$

In definitiva:

$$f_I(i) = \begin{cases} 0 & i < -1 \\ 0.1587 & i = -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{i^2}{2}} & -1 < i < 1 \\ 0.1587 & i = 1 \\ 0 & i > 1 \end{cases}$$

## Esercizi

### Esercizio 4.14

Completare la distribuzione della variabile casuale doppia $(X, Y)$, nell'ipote che le due componenti siano stocasticamente indipendenti.

| $Y$ / $X$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $p_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | | | 0.21 | |
| $x_2$ | | 0.10 | | |
| $x_3$ | | | | 0.10 |
| $q_j$ | | | 0.30 | |

[R:

| $Y$ / $X$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $p_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0.14 | 0.35 | 0.21 | 0.70 |
| $x_2$ | 0.04 | 0.10 | 0.06 | 0.20 |
| $x_3$ | 0.02 | 0.05 | 0.03 | 0.10 |
| $q_j$ | 0.20 | 0.50 | 0.30 | |

]

### Esercizio 4.15

Una variabile casuale discreta a due dimensioni ha distribuzione:

| $Y$ / $X$ | 0 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.15 | 0.22 | 0.03 |
| 2 | 0.25 | 0.08 | 0.27 |

a) Si calcolino le medie $\mu_X$ e $\mu_Y$, le varianze $\sigma_X^2$ e $\sigma_Y^2$ e il coefficiente di correlazione lineare $\rho_{XY}$;

b) si calcolino le seguenti probabilità :
$P(X = 2), P(Y = 4), P(X = 2 \cap Y = 4), P(X = 2|Y = 4)$;

c) le due componenti $X$ e $Y$ sono stocasticamente indipendenti?

[**R:** a) $\mu_X = 1.6$ ; $\mu_Y = 1.8$ ; $\sigma_X^2 = 0.24$ ; $\sigma_Y^2 = 2.76$ ; $\rho_{XY} = 0.196589$ ; b) $P(X = 2) = 0.6$ ; $P(Y = 4) = 0.3$ ; $P(X = 2 \cap Y = 4) = 0.27$ ; $P(X = 2|Y = 4) = 0.9$ ; c) no]

### Esercizio 4.16

Sono date due distribuzioni

$$X = \begin{cases} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0.5 & 0.3 & 0.15 & 0.05 \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.45 & 0.25 & 0.15 & 0.10 & 0.05 \end{cases}$$

Si costruiscano almeno tre variabili casuali doppie di cui le distribuzioni date possano essere le marginali, tra cui quella corrispondente all'ipotesi di indipendenza stocastica.

### Esercizio 4.17

Siano $X$ e $Y$ variabili casuali con la seguente distribuzione di probabilità congiunta:

| $Y$ / $X$ | -3 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.2 | 0.2 |
| 3 | 0.3 | 0.1 | 0.1 |

a) Determinare le distribuzioni marginali di $X$ e $Y$;

b) determinare il coefficiente di correlazione lineare $\rho_{XY}$;

c) determinare la curva di regressione e di variabilità della $Y$ sulla $X$;

d) calcolare $\eta^2_Y$.

[**R:** a) $X = \begin{cases} 1 & 3 \\ 0.5 & 0.5 \end{cases}$ ; $Y = \begin{cases} -3 & 2 & 4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{cases}$ ; b) $\rho_{XY} = -0.394771$;

c) $\begin{array}{c|cc} X & 1 & -3 \\ \hline \overline{y}(x) & 1.8 & -0.6 \end{array}$ ; $\begin{array}{c|cc} X & 1 & -3 \\ \hline \sigma^2(Y|X) & 6.56 & 9.04 \end{array}$ ; d) $\eta^2_Y = 0.155844$]

### Esercizio 4.18

Data la variabile casuale doppia discreta:

| $Y$ / $X$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.04 | 0.03 | 0.05 | 0.03 |
| 1 | 0.02 | 0.03 | 0.05 | 0.06 |
| 2 | 0.04 | 0.07 | 0.06 | 0.52 |

si calcolino

a) le distribuzioni marginali delle due componenti $X$ e $Y$;

b) le distribuzioni condizionate $Y|X$;

c) la curva di regressione della $Y$ sulla $X$;

d) l'indice di Pearson $\eta^2_Y$;

e) la probabilità $P(Y > X^2)$.

[**R:** a) $X = \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ 0.15 & 0.16 & 0.69 \end{cases}$ ; $Y = \begin{cases} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.13 & 0.16 & 0.61 \end{cases}$ ;

b) $\begin{array}{lcllll} (Y|X=x_1) & = & 0.2667 & 0.2 & 0.3333 & 0.2 \\ (Y|X=x_2) & = & 0.125 & 0.1875 & 0.3125 & 0.375 \\ (Y|X=x_3) & = & 0.058 & 0.1014 & 0.0870 & 0.7536 \end{array}$ ;

c) $\begin{array}{c|ccc} X & 0 & 1 & 2 \\ \hline \overline{y}(x) & 0.4667 & 0.9375 & 1.5362 \end{array}$ ; d) $\eta^2_Y = 0.1538$ ; e) $P = 0.14$]

**Esercizio 4.19**

Siano date le variabili aleatorie $X_1$ e $X_2$ indipendenti:

$$X_1 = \begin{cases} 0 & 1 \\ 0.55 & 0.45 \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} -1 & 0 \\ 0.52 & 0.48 \end{cases}$$

si costruisca la tabella doppia $(\sum, \Pi)$, dove:

$$\Sigma = X_1 + X_2 \qquad \Pi = X_1 \cdot X_2$$

si calcolino media e varianza delle distribuzioni condizionate:

$$\Sigma|\Pi = 0 \qquad \Pi|\Sigma = 0$$

[R:

| Σ / Π | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| -1 | 0 | 0.234 | 0 |
| 0 | 0.286 | 0.264 | 0.216 |

;

$\mu_{\Sigma|\Pi=0} = -0.091381$ ; $\mu_{\Pi|\Sigma=0} = -0.469880$ ;

$\sigma^2(\Sigma|\Pi = 0) = 0.647001$; $\sigma^2(\Pi|\Sigma = 0) = 0.249093$]

**Esercizio 4.20**

Data la variabile casuale doppia

| X / Y | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| 2 | 1/8 | 1/8 | 0 |
| 3 | 1/8 | 1/4 | 1/8 |
| 4 | 0 | 1/8 | 1/8 |

a) si calcolino le distribuzioni marginali, le distribuzioni condizionate $Y|X$, la loro media e la loro varianza ($\mu_{Y|X}$ e $\sigma^2_{Y|X}$);

b) si trovi la distribuzione di $Z = Y - 2X$;

c) si trovi $\mu_Z$.

[R: a) $X = \begin{cases} -1 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{cases}$, $Y = \begin{cases} 2 & 3 & 4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{cases}$,

$$\begin{array}{ll} (Y|X=-1) & = 1/2 \ \ 1/2 \ \ 0 \\ (Y|X=0) & = 1/4 \ \ 1/2 \ \ 1/4 \\ (Y|X=1) & = 0 \ \ 1/2 \ \ 1/2 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{c|ccc} X & -1 & 0 & 1 \\ \hline \mu_{Y|X} & 2.5 & 3 & 3.5 \\ \hline \sigma^2_{Y|X} & 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{array} \ ;$$

b) $Z = \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1/8 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/8 & 0 \end{cases}$ ; c) $\mu_Z = 3.$ ]

**Esercizio 4.21**

Data la seguente variabile casuale doppia discreta $(X, Y)$:

| Y / X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| -1 | 0.00 | 0.15 | 0.05 |
| 0 | 0.10 | 0.25 | 0.05 |
| 1 | 0.20 | 0.10 | 0.10 |

a) determinare la distribuzione congiunta della variabile casuale $(V, W)$ legata a $(X, Y)$ dalla relazione:

$$\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^2 + Y^2 \\ Y - X \end{bmatrix}$$

b) verificare il teorema della media per la componente $W$ $(E_W\{W\} = E_{XY}\{W(X,Y)\})$.

[**R:** a)

| W / V | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 0.10 | | | |
| 1 | 0.20 | | 0.25 | | |
| 2 | | 0.10 | | 0.15 | |
| 4 | | | | 0.05 | |
| 5 | | | 0.10 | | 0.05 |

b) $E_W\{W\} = 0.7 = E_{XY}\{W(X,Y)\}$ ]

**Esercizio 4.22**

Data la seguente variabile doppia discreta $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$:

| Y / X | -1 | 0 | 1 | 1.5 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.11 | 0.10 | 0.01 | 0.01 |
| 0.5 | 0.09 | 0.18 | 0.04 | 0.13 |
| 1 | 0.02 | 0.01 | 0.10 | 0.20 |

a) determinare le distribuzioni marginali, le medie e le varianze di $X$ e di $Y$ e la covarianza $\sigma_{XY}$;

b) determinare le distribuzioni condizionate $(Y|X = x_i)$ per ogni $i$;

c) determinare la curva di regressione e la curva di variabilità di $Y$ su $X$;

d) determinare la distribuzione della variabile casuale $Z = Y - 2X + 1$;

e) determinare se le componenti $X$ e $Y$ sono stocasticamente indipendenti.

[**R:** a) $X = \begin{cases} 0 & 0.5 & 1 \\ 0.23 & 0.44 & 0.33 \end{cases}$, $Y = \begin{cases} -1 & 0 & 1 & 1.5 \\ 0.22 & 0.29 & 0.15 & 0.34 \end{cases}$;

$\mu_X = 0.55$ ; $\sigma_X^2 = 0.1375$ ; $\mu_Y = 0.44$ ; $\sigma_Y^2 = 0.941$ , $\sigma_{XY} = 0.2105$ ;

$$\text{b)} \quad \begin{array}{ll} (Y|X=0) & = 0.4783 \quad 0.4348 \quad 0.0435 \quad 0.0435 \\ (Y|X=0.5) & = 0.2045 \quad 0.4091 \quad 0.0909 \quad 0.2954 \\ (Y|X=1) & = 0.0606 \quad 0.0303 \quad 0.3030 \quad 0.6060 \end{array} ;$$

c)

| $X$ | 0.0 | 0.5 | 1.0 |
|---|---|---|---|
| $\overline{y}(x_i)$ | -0.3696 | 0.3295 | 1.1515 |

,

| $X$ | 0.0 | 0.5 | 1.0 |
|---|---|---|---|
| $\sigma(Y\|X)$ | 0.4830 | 0.8516 | 0.4013 |

d) $Z = \begin{cases} -2 & -1 & 0 & 0.5 & 1 & 1.5 & 2 & 2.5 \\ 0.02 & 0.1 & 0.39 & 0.2 & 0.14 & 0.13 & 0.01 & 0.01 \end{cases}$ ; e) no]

**Esercizio 4.23**

Data la variabile casuale doppia

| $X$ / $Y$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| -2 | 0.10 | | | | |
| -1 | 0.05 | 0.10 | | | |
| 0 | | 0.05 | 0.25 | 0.10 | |
| 1 | | 0.05 | | 0.20 | |
| 2 | | | | | 0.10 |

a) si trovino le curve di regressione e di variabilità di $Y$ su $X$;

b) si trovi inoltre la retta di regressione di tale variabile doppia

$$Y - \mu_Y = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}(X - \mu_X)$$

e la si confronti graficamente con la curva di regressione;

c) si calcoli inoltre la $P(X^2 + Y^2 \leq 4)$.

[**R:** a) $\dfrac{X}{\overline{y}(x)} \left| \begin{array}{ccccc} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline -1.\overline{6} & -0.25 & 0 & 0.\overline{6} & 2 \end{array} \right.$ ;

$\dfrac{X}{\sigma^2(Y|X)} \left| \begin{array}{ccccc} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0.\overline{2} & 0.688 & 0 & 0.\overline{2} & 0 \end{array} \right.$ ;

b) $Y - 0.1 = 0.7667(X - 1)$ ; c) P = 0.6]

**Esercizio 4.24**

Data la seguente variabile statistica doppia

| X / Y | 2.0 | 2.5 | 3.0 | 3.5 | 4.0 |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 0 | 1 | 4 | 8 | 2 |
| 8 | 2 | 5 | 8 | 4 | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 5 | 0 | 0 |

a) calcolare le medie condizionate $m_{Y|X}$ e $m_{X|Y}$;

b) calcolare le medie generali di $X$ e di $Y$ e le rispettive varianze;

c) calcolare il coefficiente di correlazione lineare $R_{XY}$.

[**R:** $m_X = 3.05$ ; $m_Y = 7.55$ ; $m_{Y|X} = 8.\overline{6}\ \ 7.\overline{6}\ \ 8.1176\ \ 6.\overline{6}\ \ 6.0$;
$m_{X|Y} = 3.3\overline{6}\ \ 2.8684\ \ 2.8\overline{3}$ ; $s^2_X = 0.235$ ; $s^2_Y = 1.8975$ ;
$R_{XY} = -0.453$]

**Esercizio 4.25**

Dieci studenti seguono un corso universitario e, per valutare l'efficacia delle lezioni, si rilevano il numero di ore seguite ($X$) ed il voto conseguito all'esame finale ($Y$) per ogni studente, ottenendo le seguenti coppie di valori:

(39,28); (33,25); (35,25); (38,30); (32,18); (30,24); (33,26); (27,24); (30,20); (35,25).

a) Calcolare le medie $m_X$ e $m_Y$ e le varianze;

b) calcolare il coefficiente di correlazione $R_{XY}$.

[**R:** $m_X = 33.2$ ; $m_Y = 24.5$ ; $s^2_X = 12.36$ ; $s^2_Y = 10.85$ ; $R_{XY} = 0.6476$]

### Esercizio 4.26

Data la variabile statistica doppia:

| $Y$ / $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 0.5 | 0.12 | 0.37 | 0.04 | 0.05 |
| 1.0 | 0.30 | 0.01 | 0.03 | 0.08 |

a) calcolare la distribuzione marginale della componente $Y$, la media $m_Y$ e la varianza $s_Y^2$ e le distribuzioni condizionate $Y|X = x_1$, $Y|X = x_2$;

b) determinare i due valori della curva di regressione;

c) determinare la distribuzione di $U = \frac{Y}{X}$.

[**R:** a) $Y = \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.42 & 0.38 & 0.07 & 0.13 \end{cases}$ ; $m_Y = 1.91$ ; $s_Y^2 = 1.002$ ;

$(Y|X = x_1) = \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.2069 & 0.6379 & 0.069 & 0.0862 \end{cases}$ ;

$(Y|X = x_2) = \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.7143 & 0.0238 & 0.0714 & 0.1905 \end{cases}$ ;

b)

| $X$ | 0.5 | 1.0 |
|---|---|---|
| $\overline{y}(x)$ | 2.0345 | 1.7381 |

;

c) $U = \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 8 \\ 0.30 & 0.13 & 0.03 & 0.45 & 0.06 & 0.05 \end{cases}$ ]

### Esercizio 4.27

Formare una tabella a doppia entrata per i seguenti dati relativi a una variabile statistica doppia $(X, Y)$:

(4,5) ; (2,3) ; (4,5) ; (4,3) ; (4,5) ; (4,3) ; (4,3) ; (2,5) ; (4,5) ; (4,5) ; (2,5) ; (4,5).

Determinare le distribuzioni marginali, le medie $m_X$ e $m_Y$, la covarianza $s_{XY}$ e l'indice di Bonferroni $\beta_0$.

[**R:** $X = \begin{cases} 2 & 4 \\ 0.25 & 0.75 \end{cases}$ ; $Y = \begin{cases} 3 & 5 \\ 0.\overline{3} & 0.\overline{6} \end{cases}$ ;
$m_X = 3.5$ ; $m_Y = 4.\overline{3}$ ; $s_{XY} = 0$ ; $\beta_0 = 0$]

**Esercizio 4.28**

Date le seguenti coppie di valori della variabile statistica $(X, Y)$:

(2.4, 7.4) (8.0, 5.7) (1.9, 7.0) (3.1, 2.2) (1.4, 8.9) (6.6, 2.1)

calcolare $m_X, m_Y, s_X, s_Y, s_{XY}, R_{XY}$.

[**R:** $m_X = 3.9$ ; $m_Y = 5.55$ ; $s_X = 2.491318$ ; $s_Y = 2.578598$ ; $s_{XY} = -3.345$ ; $R_{XY} = -0.520695$]

**Esercizio 4.29**

Data la variabile statistica doppia illustrata nella seguente tabella:

| $Y$ / $X$ | 6 | 9 | 15 |
|---|---|---|---|
| 4 | 29 | 26 | 21 |
| 7 | 20 | 24 | 27 |

Calcolare $m_X$, $m_Y$, $m_{Y|X=x_1}$ , $m_{Y|X=x_2}$ , $C_{XY}$.

[**R:** $m_X = 5.449$ , $m_Y = 9.963$ , $m_{Y|X=4} = 9.519$ , $m_{Y|X=7} = 10.440$,
$C_{XY} = \begin{bmatrix} 2.247 & 0.693 \\ 0.693 & 13.842 \end{bmatrix}$]

**Esercizio 4.30**

Data la variabile statistica doppia:

| $X$ / $Y$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.130 | 0.151 | 0.068 |
| 1 | 0.063 | 0.094 | 0.494 |

a) calcolare le distribuzioni marginali;

b) calcolare le medie $m_X, m_Y$, la matrice di covarianza $C_{XY}$ e il coefficiente di correlazione lineare $R_{XY}$;

c) calcolare la curva di regressione della $Y$ sulla $X$;

d) dare la distribuzione della variabile $Z = X + Y$, ovvero i valori argomentali e le relative probabilità .

[**R:** a) $X = \begin{cases} 1 & 2 & 3 \\ 0.193 & 0.245 & 0.562 \end{cases}$ ; $Y = \begin{cases} 0 & 1 \\ 0.349 & 0.651 \end{cases}$ ;

b) $m_X = 2.369$ ; $m_Y = 0.651$ ; $C_{XY} = \begin{bmatrix} 0.61884 & 0.19078 \\ 0.19078 & 0.22720 \end{bmatrix}$ ;
$R_{XY} = 0.50879$ ;

c)

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\overline{y}(x)$ | 0.3264 | 0.3837 | 0.8790 |

;

d) $Z = \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.13 & 0.214 & 0.162 & 0.494 \end{cases}$ ]

**Esercizio 4.31**
Date le coppie di valori seguenti (estrazioni da una variabile doppia $(X, Y)$ )

$(0,0)$ $(0,1)$ $(-\frac{1}{2},2)$ $(-\frac{1}{2},1)$ $(0,1)$ $(\frac{1}{2},0)$ $(\frac{1}{2},1)$ $(0,2)$ $(-\frac{1}{2},2)$ $(\frac{1}{2},0)$

a) determinare la distribuzione congiunta della variabile $(X, Y)$;

b) calcolare la medie $m_X, m_Y$;

c) calcolare la distribuzione di $Y|X = 0$;

d) calcolare l'indice di correlazione lineare $R_{XY}$;

e) determinare la distribuzione della variabile $Z$ a una dimensione, legata alle due componenti $(X, Y)$ dalla relazione: $Z = X/(Y + 1)$.

[**R:** a)

| Y / X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| -1/2 | 0.0 | 0.1 | 0.2 |
| 0 | 0.1 | 0.2 | 0.1 |
| 1/2 | 0.2 | 0.1 | 0.0 |

; b) $m_X = 0$ ; $m_Y = 1$;

c) $(Y|X = 0) = \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{cases}$ ; d) $R_{XY} = -0.\overline{6}$ ;

e) $Z = \begin{cases} -1/2 & -1/4 & -1/6 & 0 & 1/6 & 1/4 & 1/2 \\ 0.0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.0 & 0.1 & 0.2 \end{cases}$ ]

**Esercizio 4.32**
Un'azienda produttrice di beni di largo consumo ha fatto un'indagine per tentare di studiare il grado di connessione esistente fra il tipo di pubblicità $X$ ed il livello di vendite $Y$ ottenendo i risultati seguenti:

| $Y$ / $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Radio T.V. | 2 | 3 | | |
| Cinema | 3 | 8 | 15 | 4 |
| Giornali | | | 5 | 10 |

Calcolare un opportuno indice di connessione fra $X$ e $Y$ ($\beta_Y$).

[**R:** $\beta_Y = 0.3868$]

**Esercizio 4.33**

Per la seguente variabile statistica doppia

| $Y$ / $X$ | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.1 | | |
| 2 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | |
| 3 | | 0.1 | 0.1 | 0.1 |
| 4 | | | 0.1 | 0.1 |

si calcolino varianza residua e varianza spiegata di $Y$, coefficiente di Pearson $\eta^2_Y$ e coefficiente di correlazione lineare $R_{XY}$.

[**R:** $\sigma^2_{S_Y} = 2.2$ ; $\sigma^2_{R_Y} = 2$ ; $\eta^2_Y = 0.5238$ ; $R_{XY} = 0.7143$]

**Esercizio 4.34**

Data la variabile statistica doppia

| $Y$ / $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 6 | 0 |
| 3 | 0 | 8 | 0 | 0 |
| 4 | 9 | 0 | 2 | 1 |

a) calcolare le curve di regressione $\overline{x}(y)$ e $\overline{y}(x)$ e le curve di variabilità $\sigma^2(Y|X), \sigma^2(X|Y)$;

b) calcolare gli indici di Pearson $\eta^2_X$ ed $\eta^2_Y$ e di correlazione $R_{XY}$;

c) calcolare la varianza residua di $X$;

d) verificare il teorema degli scarti per la variabile $X$.

[**R:** a) $\begin{array}{c|cccc} Y & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \overline{x}(y) & 4 & 3 & 2.\overline{3} & 4 \end{array}$ , $\begin{array}{c|cccc} X & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \overline{y}(x) & 3 & 3 & 2 & 1.58\overline{3} \end{array}$

$\begin{array}{c|cccc} Y & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \sigma^2_{X|Y} & 0 & 0 & 0.8889 & 0 \end{array}$ , $\begin{array}{c|cccc} X & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \sigma^2_{Y|X} & 0 & 0 & 0 & 1.0764 \end{array}$ ;

b) $\eta^2_X = 0.626$ ; $\eta^2_Y = 0.409$ ; $R_{XY} = -0.6148$ ;

c) $\sigma^2_{R_X} = 0.296$ ; $d)\sigma^2_{S_X} = 0.496$ ; $\sigma^2_X = 0.792$]

### Esercizio 4.35

Data la variabile statistica doppia sotto riportata, completare la tabella a disposizione e calcolare gli indici di Pearson e di correlazione.

| $X$ \ $Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $p_j$ | $\overline{y}(x)$ | $\sigma^2(Y\|X)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | | | 7 | | | |
| 2 | | 9 | | | | | |
| 3 | 2 | 5 | 1 | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| $q_i$ | | | | | | | |
| $\overline{x}(y)$ | | | | | | | |
| $\sigma^2(X\|Y)$ | | | | | | | |

[**R:** $\eta^2_X = 0.5621$ ; $\eta^2_Y = 0.0200$ ; $R_{XY} = -0.1394$]

### Esercizio 4.36

Considerate le seguenti coppie di dati

(1,150) (4,500) (2,300) (1,200) (3,350) (3,300) (4,450) (2,250) (3,350) (4,500) (1,150) (4,500) (3,400) (1,200) (4,400) (1,300) (2,250) (1,200) (2,300) (2,350)

a) raccogliere i dati sotto forma di tabella a doppia entrata, in cui $X$ è la prima componente della variabile e $Y$ la seconda;

b) calcolare l'indice di Pearson $\eta_Y^2$;

c) calcolare il coefficiente di correlazione.

[**R:** $\eta_Y^2 = 0.8554$ ; $R_{XY} = 0.9188$]

**Esercizio 4.37**

Date le seguenti densità di probabilità congiunte di una variabile casuale bidimensionale $(X, Y)$:

a) $f_{X,Y}(x, y) = k_1 e^{-1/2(x^2-xy+y^2)}$

b) $f_{X,Y}(x, y) = k_2 e^{-x/4-y/2}$

c) $f_{X,Y}(x, y) = \frac{k_3}{(1+x^2+y^2)^2}$.

dire se le due variabili sono stocasticamente indipendenti nei tre casi sopra elencati e giustificare la risposta.

[**R:** a) e c) no: $f_{XY} \neq f_X \cdot f_Y$ ; b) sì: $f_{XY} = f_X \cdot f_Y$]

**Esercizio 4.38**

Data la variabile casuale doppia con

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} a - x - y & \text{in } \begin{matrix} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{matrix} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

a) dire se $X$ e $Y$ sono stocasticamente indipendenti;

b) calcolare $\mu_X$ e $\mu_Y$.

[**R:** a) no ; b) $a = 2$, $\mu_X = \frac{5}{12}$ ; $\mu_Y = \frac{5}{12}$]

**Esercizio 4.39**

Data la densità di probabilità congiunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \alpha(1 - |y| - |x|) & |x| + |y| \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

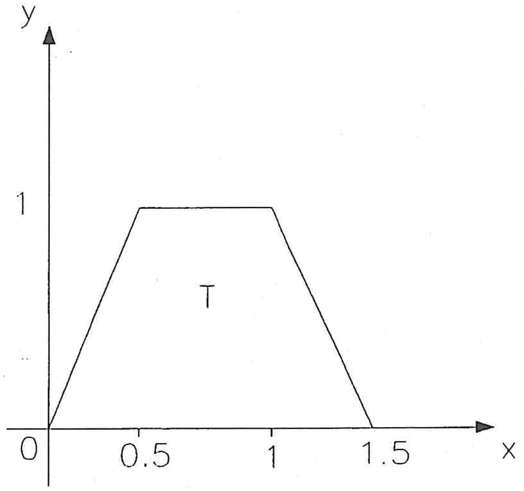
a) determinare $\alpha$ (si osservi, per semplificare il calcolo, che $f_{XY}(x,y)$ è simmetrica sia in $X$ che in $Y$);

b) determinare le densità condizionate $f_{Y|X}$ e $f_{X|Y}$.

[**R:** $\alpha = 3/2$ ; $f_{Y|X} = \dfrac{1-|x|-|y|}{(1-|x|)^2}$ ; $f_{X|Y} = \dfrac{1-|x|-|y|}{(1-|y|)^2}$]

## Esercizio 4.40

Data la variabile doppia $(X, Y)$ distribuita uniformemente sull'insieme $T$ in figura




a) si determini la funzione densitá di probabilità di $(X, Y)$;

b) si determini $F_X(x)$;

c) si trovino le distribuzioni marginali $f_X(x), f_Y(y)$;

d) si trovino le medie $\mu_X, \mu_Y$;

e) si trovino la distribuzione condizionata $f_{Y|X}$ e la curva di regressione $\overline{y}(x)$ (si considerino separatamente gli intervalli $0 \leq x \leq 1/2$, $1/2 \leq x \leq 1$, $1 \leq x \leq 3/2$).

[**R:** a) $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$$\text{b)}\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 1/2 \\ x - 1/4 & 1/2 \leq x \leq 1 \\ -x^2 + 3x - 5/4 & 1 \leq x \leq 3/2 \\ 1 & x \geq 3/2 \end{cases}$$

$$\text{c)}\ f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 & 1/2 \leq x \leq 1 \\ 3 - 2x & 1 \leq x \leq 3/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad ;$$

$f_Y(y) = \frac{3}{2} - y \quad 0 \leq y \leq 1$ ;

d) $\mu_X = 0.75$ , $\mu_Y = 5/12$

$$\text{e)}\ f_{Y|X} = \begin{cases} 1/2x & 0 \leq x \leq 1/2 \quad , \quad 0 \leq y \leq 2x \\ 1 & 1/2 \leq x \leq 1 \quad , \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 1/(3-2x) & 1 \leq x \leq 3/2 \quad , \quad 0 \leq y \leq 3 - 2x \end{cases}$$

$$\overline{y}(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \leq x \leq 1 \quad ] \\ 3/2 - x & 1 \leq x \leq 3/2 \end{cases}$$

### Esercizio 4.41

Data la densità di probabilità bidimensionale

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} C\left(1 - \left|\dfrac{y}{1-x^2}\right|\right) & |x| \leq 1 \ , |y| \leq 1 - x^2 \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

a) calcolare $C$;

b) calcolare la marginale $f_X(x)$, media e varianza $\mu_X$ e $\sigma_X^2$ (si osservi che $f_{XY}(x,y)$ è simmetrica sia in $x$ che in $y$).

[**R:** a) $C = \frac{3}{4}$ ; b) $f_X(x) = \frac{3}{4}(1-x^2)$ per $|x| \leq 1$, $\mu_X = 0$, $\sigma_X^2 = \frac{1}{5}$]

### Esercizio 4.42

Data la densità di probabilità in $\mathbb{R}^2$:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} Axy & \text{in } T \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

dove $T$ è il triangolo di vertici (0,0), (0,1), (1,0), determinare $A$, $E\left\{\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right\}$, $E\{Y|X\}$.

[**R:** $A = 24$ ; $E\left\{\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$ ; $E\{Y|X\} = \frac{2}{3}(1-x)$]

### Esercizio 4.43

Data la variabile casuale bidimensionale $(X,Y)$ con distribuzione:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} C(y-x)^2 & x \in [-1,1], \ y \in [-1,1] \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

a) determinare la costante $C$;

b) calcolare le densità marginali di $X$ e $Y$ e verificare se $X$ e $Y$ sono indipendenti.

[**R:** a) $C = \frac{3}{8}$; b) $f_X(x) = \dfrac{1+3x^2}{4}$ , $f_Y(y) = \dfrac{1+3y^2}{4}$ , $X$ e $Y$ non sono indipendenti.]

### Esercizio 4.44

Data la variabile casuale bidimensionale con funzione densità di probabilità

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

essendo $D$ il dominio limitato da: $y = 0$; $y = 1$; $y = -x$; $y = -x + 1$ determinare:

a) la densità di probabilità marginale $f_X(x)$ e condizionata $f_{X|Y}(x,y)$;

b) la curva di regressione $\overline{y}(x)$;

c) la varianza residua e la varianza totale di $y$ (per il calcolo di $\sigma_R^2$ si suggerisce la sostituzione $t = y - \frac{1-x}{2}$).

[**R:** a) $f_X(x) = 1 - |x|$ , $x \in [-1, 1]$ ; $f_{Y|X} = \dfrac{1}{1 - |x|}$ ; b) $\overline{y}(x) = \dfrac{1-x}{2}$; c) $\sigma_{R_Y}^2 = \frac{1}{24}$ , $\sigma_Y^2 = \frac{1}{12}$ ]

### Esercizio 4.45

Data la variabile casuale doppia $(X, Y)$ con funzione densità di probabilità

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} Ce^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} & \text{in} \quad D = \left\{ \begin{array}{c} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{array} \right\} \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

determinare (facendo uso della tabella della normale standard (Tab. 2) per la soluzione degli integrali che compaiono nell'esercizio):

a) $C$;

b) le medie $E\{X\}$ ed $E\{Y\}$.

[**R:** $C = 0.9772$ ; $E\{X\} = 0.4599$ ; $E\{Y\} = 0.7229$]

### Esercizio 4.46

Si considerino le due variabili casuali reali $X$ e $U$ di cui si sa che $X$ è distribuita uniformemente in (0,1), mentre

$$f_{U|X}(u|x) = \begin{cases} 1/x & 0 < u < x < 1 \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Determinare $f_{UX}(u,x)$, $f_{X|U}(x|u)$, $E\{X\}$ , $E\{U\}$.

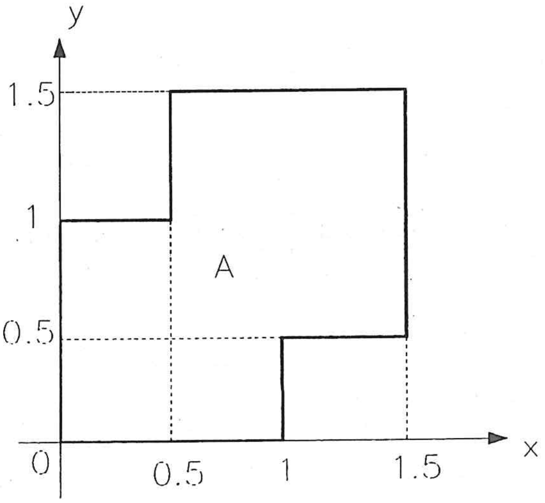
[**R:** $f_{UX}(u,x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 \le x \le 1 \qquad 0 \le u \le x \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ ;

$$f_{X|U}(x|u) = \begin{cases} \dfrac{1}{x|\ln u|} & 0 \le u \le 1 \qquad u \le x \le 1 \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad ;$$

$E\{X\} = \frac{1}{2}$ , $E\{U\} = \frac{1}{4}$ ]

### Esercizio 4.47

Sia data una distribuzione di probabilità uniforme sull'insieme in figura




a) Si dia la funzione densità di probabilità $f_{XY}(x,y)$;

b) si trovino le $f_{Y|X}(y|x)$, la curva di regressione $\overline{y}(x)$ e di variabilità $\sigma^2(Y|X)$;

c) si dica (per simmetria) quale deve essere la $\mu_Y = E\{Y\}$ e si dimostri che in questo caso vale la formula

$$\mu_Y = E_X\{E\{Y|X\}\} = E_X\{\overline{y}(x)\}.$$

[**R:** a) $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{7} & \text{su } A \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ ;

b) $f_{Y|X} = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/2 \;, & 0 \leq y \leq 1 \\ 2/3 & 1/2 \leq x < 1 \;, & 0 \leq y \leq 3/2 \\ 1 & 1 \leq x < 3/2 \;, & 1/2 \leq y \leq 3/2 \end{cases}$ ;

$\overline{y}(x) = \begin{cases} 1/2 & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 3/4 & 1/2 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq 3/2 \end{cases}$ ;

$\sigma^2(Y|X) = \begin{cases} 1/12 & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 3/16 & 1/2 \leq x \leq 1 \\ 1/12 & 1 \leq x \leq 3/2 \end{cases}$ ; c) $\mu_Y = \frac{3}{4}$ ]

### Esercizio 4.48

Data la variabile casuale doppia $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ continua, con densità di probabilità

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} K & 0 \leq y \leq 2x \leq 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

a) determinare $K$;

b) calcolare le marginali $f_X(x)$, $f_Y(y)$ e determinare se $X$ e $Y$ sono indipendenti;

c) calcolare $\mu_X$, $\mu_Y$, $\sigma_X^2$, $\sigma_Y^2$, $\sigma_{XY}$.

[**R:** a) $K = 1$ ; b) $f_X(x) = 2x$ , $0 \leq x \leq 1$ ; $f_Y(y) = 1 - \frac{y}{2}$ , $0 \leq y \leq 2$;
c) $\mu_X = \frac{2}{3}$ ; $\mu_Y = \frac{2}{3}$ ; $\sigma_X^2 = \frac{1}{18}$ ; $\sigma_Y^2 = \frac{2}{9}$ ; $\sigma_{XY} = \frac{1}{18}$ ]

**Esercizio 4.49**

Data la variabile casuale doppia $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ continua, con densità di probabilità

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} K & 0 \leq y \leq 2x \leq 4 \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

si determini la curva di variabilità di $Y$ rispetto a $X$.

[**R:** $\sigma^2(Y|X) = \dfrac{x^3}{3} \quad 0 \leq x \leq 2$]

**Esercizio 4.50**

Una variabile casuale bidimensionale ha densità di probabilità

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} a & 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq x^2 \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

determinare $a$, le marginali $f_X(x), f_Y(y)$ e $\mu_X$, $\mu_Y$.

[**R:** $a = 3$; $f_X(x) = 3x^2$, $0 \leq x \leq 1$;
$f_Y(y) = 3(1 - \sqrt{y}), 0 \leq y \leq 1$; $\mu_X = \frac{3}{4}$ ; $\mu_Y = \frac{3}{10}$ ]

**Esercizio 4.51**

Data la variabile casuale continua bidimensionale definita nell'intervallo $[1, 2]$ con la condizione $1 \leq x \leq y \leq 2$ e con densità di probabilità

$$f_{X,Y}(x,y) = a$$

si calcoli il valore di $a$, l'indice di Pearson $\eta_Y^2$, il coefficiente di correlazione lineare $\rho_{XY}$, le distribuzioni marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ e la distribuzione della $Y$ condizionata ad $X$, $f_{Y|X}(y|x)$.

[**R:** $a = 2$ ; $\eta_Y^2 = 0.25$ ; $\rho_{XY} = 0.5$ ; $f_X(x) = 2(2-x)$, $1 \leq x \leq 2$ ;
$f_Y(y) = 2(y-1)$, $1 \leq y \leq 2$ ; $f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{1}{(2-x)}$ ]

### Esercizio 4.52

Si consideri una variabile casuale doppia distribuita uniformemente sul rettangolo $1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 2$.

Si determini la distribuzione della variabile casuale $Z = X + Y$.

$$[\mathbf{R:}\ f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 1 \\ \frac{z-1}{2} & 1 \leq z \leq 2 \\ \frac{1}{2} & 2 \leq z \leq 3 \\ 2 - \frac{1}{2}z & 3 \leq z \leq 4 \\ 0 & z \geq 4 \end{cases} \ ]$$

### Esercizio 4.53

Data la variabile casuale bidimensionale

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 2 & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

dove $D$ è il triangolo di vertici (0,0) (0,1) (1,0), determinare

a) media e varianza generale di $Y$;

b) media e varianza condizionate di $Y|X$;

c) $P(0 \leq X - Y \leq 1)$.

[**R:** $\mu_Y = \frac{1}{3}$ ; $\sigma_Y^2 = \frac{1}{18}$ ; $\mu_{Y|X} = \frac{1-x}{2}$ ; $\sigma^2(Y|X) = \frac{(1-x)^2}{12}$ ; $P = \frac{1}{2}$ ]

# 5 PROPAGAZIONE DELLA COVARIANZA

## Trasformazioni di variabili casuali

Si considerino le variabili casuali $\underline{X}$ e $\underline{Y}$ rispettivamente $m$ ed $n$ dimensionali:

$$\dim[\underline{Y}] = m$$
$$\dim[\underline{X}] = n$$

e la trasformazione:

$$\underline{Y} = \underline{g}(\underline{X})$$

descrivibile per esteso:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x_1, \ldots, x_n) \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix}$$

Si supponga che siano note media e matrice di covarianza della variabile casuale $\underline{X}$:

$$E\{X\} = \mu_X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad ; \quad C_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{x_1} & \sigma_{x_1 x_2} & \ldots & \sigma_{x_1 x_n} \\ \sigma_{x_1 x_2} & \sigma^2_{x_2} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \sigma^2_{x_n} \end{bmatrix}$$

e che si vogliano ricavare media e matrice di covarianza della variabile casuale $\underline{Y}$.

## Caso lineare

La trasformazione è del tipo: $\underline{Y} = A\underline{X} + \underline{b}$

Si ha:

$$\underline{\mu}_Y = A\underline{\mu}_X + \underline{b}$$

$$C_{YY} = AC_{XX}A^+$$

## Caso non lineare

La traformazione è non lineare: $\underline{Y} = \underline{g}(\underline{X})$

Introdotte le ipotesi:

- $\underline{X}$ sia ben concentrata attorno a $\underline{\mu}_X$;
- $\underline{g}$ sia una funzione liscia (cioè lentamente variabile) nell'intorno di $\underline{\mu}_X$

si considera allora la linearizzazione:

$$\underline{Y} \simeq \underline{g}(\underline{\mu}_X) + \left[\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{x}}\right]_{\underline{\mu}_X} (\underline{X} - \underline{\mu}_X)$$

con

$$\left[\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{x}}\right] = \text{jacobiano} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

In questo caso si ha:

$$\underline{\mu}_Y \simeq g(\underline{\mu}_X)$$

$$C_{YY} = \left[\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{x}}\right]_{\underline{\mu}_X} C_{XX} \left[\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{x}}\right]^+_{\underline{\mu}_X}$$

**Osservazione:** Se $m = 1$, la legge di propagazione della varianza è detta legge di propagazione degli errori e nei due casi precedenti è data da:

$$\sigma_y^2 = \sum_{i,k=1}^{n} a_i a_k^+ c_{ik} \ , \quad \text{con } A = [a_i]_{i=1,\dots,n} \text{ e } C_{XX} = [c_{ik}]_{i,k=1,\dots,n}$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{i,k=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_{\mu_X} \left(\frac{\partial g}{\partial x_k}\right)^+_{\mu_X} c_{ik}$$

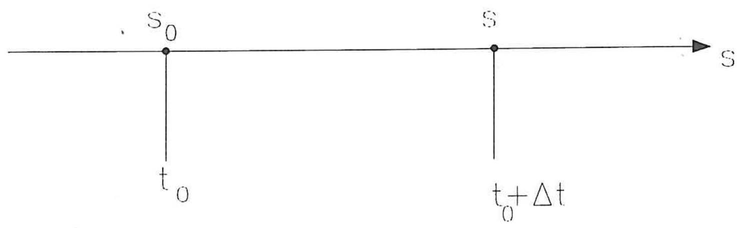
## Problemi risolti

### Esercizio 5.1

Data la relazione:

$$s = s_0 + v(t - t_0) = s_0 + v\Delta t$$

si sono osservati i seguenti valori di $s_0$ e $\Delta t$:




| $s_0$ (m) | $\Delta t$ (sec) |
|---|---|
| 5.123 | 1.412 |
| 5.125 | 1.415 |
| 5.121 | 1.411 |
| 5.122 | 1.412 |
| 5.124 | 1.413 |

Essendo $v = 0.67$ m/sec, determinare $E\{s\}$ e $\sigma_s^2$.

**Svolgimento**
Calcolo di $E\{s\}$:

$$E\{s\} = E\{s_0\} + v \cdot E\{\Delta t\}$$

$$E\{s_0\} = 5.123 \text{ m}$$

$$E\{\Delta t\} = 1.4126$$

$$E\{s\} = 5.123 + 0.67 \cdot 1.4126 = 6.0694 \text{ m}$$

La matrice di covarianza è data da:

$$C_{ss} = \left[\frac{\partial g}{\partial \xi}\right]_{\mu_\xi} C_{\xi\xi} \left[\frac{\partial g}{\partial \xi}\right]_{\mu_\xi}^{+}$$

essendo:

$$\xi = \begin{bmatrix} s_0 \\ \Delta t \end{bmatrix}; \quad \mu_\xi = \begin{bmatrix} 5.123 \text{ m} \\ 1.4126 \text{ sec} \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{\partial g}{\partial \xi}\right] = [1 \quad v]; \quad \left[\frac{\partial g}{\partial \xi}\right]_{\mu_\xi} = [1 \quad 0.67]$$

$$C_{\xi\xi} = \begin{bmatrix} \sigma_{s_0}^2 & \sigma_{s_0\Delta t} \\ \sigma_{\Delta t s_0} & \sigma_{\Delta t}^2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{s_0}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(s_{0i} - E\{s_0\})^2 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

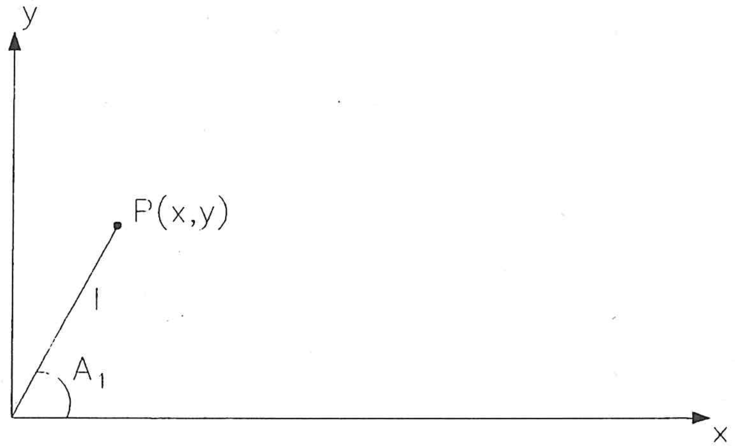
$$\sigma_{\Delta t}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\Delta t_i - E\{\Delta t\})^2 = 1.84 \cdot 10^{-6} \text{ sec}^2$$

$$\begin{aligned} \sigma_{s_0\Delta t} &= \sigma_{\Delta t s_0} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(s_0\Delta t_i) - E\{s_0\}E\{\Delta t\} = \\ &= \left(\frac{1}{5} \cdot 36.183758\right) - 7.2367498 = 1.8 \cdot 10^{-6} \text{ m sec} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{ss} &= \sigma_s^2 = [1 \quad 0.67] \begin{bmatrix} 2.00 \cdot 10^{-6} & 1.80 \cdot 10^{-6} \\ 1.80 \cdot 10^{-6} & 1.82 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.67 \end{bmatrix} = \\ &= 5.237976 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

## Esercizio 5.2

Si sono misurati l'angolo $A_1$ e la distanza $\ell$ tra il punto $Q$ di coordinate note $Q(0,0)$ ed il punto $P$ di coordinate incognite $P(x,y)$.




Supponendo che le due misure $A_1$ ed $\ell$ siano indipendenti con media rispettivamente:

$$E\{\ell\} = 1 \text{ km} \qquad E\{A_\ell\} = \frac{\pi}{3}$$

e scarto quadratico medio rispettivamente:

$$\sigma(\ell) = 1 \text{ mm} \qquad \sigma(A_1) = 2 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

determinare media e varianza delle coordinate di $P$.

### Svolgimento

Posto:

$$\eta = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \quad \text{coordinate cartesiane}$$

$$\xi = \begin{bmatrix} \ell \\ A_1 \end{bmatrix} = \quad \text{coordinate polari}$$

vale la trasformazione:

$$\eta = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(\ell, A_1) \\ g_2(\ell, A_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell \cos A_1 \\ \ell \sin A_1 \end{bmatrix} = g(\xi)$$

Poichè $\xi$ è ben concentrata intorno alla media e in tale zona $g$ è lentamente variabile, vale la formula:

$$\mu_\eta = g[\mu(\xi)]$$

Inoltre:

$$C_{\eta\eta} = \left[\frac{\partial g}{\partial \xi}\right]_{\mu_\xi} \cdot C_{\xi\xi} \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial \xi}\right]^{+}_{\mu_\xi}$$

Media delle cordinate di $P$:

$$\mu_\eta = \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_\ell \cos \mu_{A_1} \\ \mu_\ell \sin \mu_{A_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \text{ km} \\ 0.8660 \text{ km} \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{\partial g}{\partial \xi}\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial \ell} & \dfrac{\partial g_1}{\partial A_1} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial \ell} & \dfrac{\partial g_2}{\partial A_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos A_1 & -\ell \sin A_1 \\ \sin A_1 & \ell \cos A_1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{\partial g}{\partial \xi}\right]_{\mu_\xi} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.866025 \cdot 10^6 \\ 0.8666025 \cdot 10^6 & 0.5 \cdot 10^6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} 10^6 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} 10^6 & \dfrac{1}{2} \cdot 10^6 \end{bmatrix}$$

$$C_{\xi\xi} = \begin{bmatrix} \sigma_\ell^2 & \sigma_{\ell A_1} \\ \sigma_{\ell A_1} & \sigma_{A_1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \cdot 10^{-12} \end{bmatrix}$$

Gli elementi fuori dalla diagonale (coefficienti di covarianza) sono nulli perché le variabili sono indipendenti. La matrice di covarianza $C_{\xi\xi}$ assume perciò la caratteristica forma diagonale. Il viceversa non è vero, cioè la forma diagonale di $C_{\xi\xi}$ non significa necessariamente che le componenti siano indipendenti.

Si ha perciò:

$$
\begin{aligned}
C_{\eta\eta} &= \left[\frac{\partial g}{\partial \xi}\right]_{\mu_\xi} \cdot C_{\xi\xi} \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial \xi}\right]^{+}_{\mu_\xi} = \\
&= \begin{bmatrix} 3.25 & -1.2990 \\ -1.2990 & 1.75 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Si osservi che, mentre $\ell$ e $A_1$ sono indipendenti, $x$ e $y$ non lo sono.

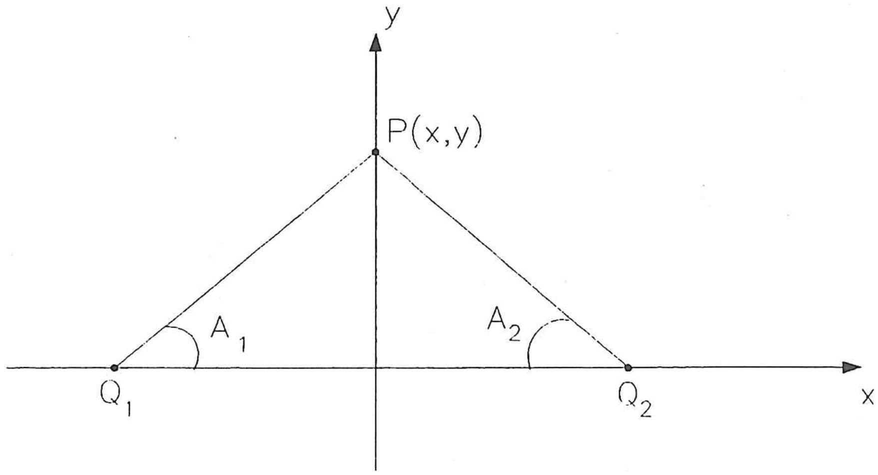
Per le varianze si ha:

$$
\sigma_x^2 = 3.25 \text{ mm}^2
$$
$$
\sigma_y^2 = 1.75 \text{ mm}^2
$$

**Esercizio 5.3**

Dati due punti di coordinate note $Q_1(-1, 0)$ e $Q_2(1, 0)$, si sono misurati i due angoli $A_1$ e $A_2$ indipendentemente, con la stessa precisione, $\sigma_{A_1} = \sigma_{A_2} = 2 \cdot 10^{-6}$ rad e con media $E\{A_1\} = E\{A_2\} = \frac{\pi}{4}$.

Determinare media e varianza delle coordinate del punto $P$.




**Svolgimento**

Si scrivono le relazioni che legano $\eta = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ a $\xi = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$.

Bisogna ragionare nel caso generale per il quale $A_1 \neq A_2$.

$$
\begin{cases} (1 + x)\tan A_1 = y \\ (1 - x)\tan A_2 = y \end{cases}
$$

$$\tan A_1 + x\tan A_1 = \tan A_2 - x\tan A_2$$
$$x(\tan A_1 + \tan A_2) = \tan A_2 - \tan A_1$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\tan A_2 - \tan A_1}{\tan A_2 + \tan A_1} \\ \\ y = \dfrac{2\tan A_1 \tan A_2}{\tan A_2 + \tan A_1} \end{cases}$$

In questo modo si è determinata la trasformazione:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(A_1, A_2) \\ g_2(A_1, A_2) \end{bmatrix}$$

Usando le formule approssimate:

$$E\{x\} = g_1[E\{A_1\}, E\{A_2\}]$$
$$E\{y\} = g_2[E\{A_1\}, E\{A_2\}]$$

si ottiene:

$$\begin{cases} E\{x\} = 0 \\ E\{y\} = 1 \end{cases}$$

La matrice di covarianza è:

$$C_{\eta\eta} = \left[\frac{\partial g}{\partial \xi}\right]_{\mu_\xi} \cdot C_{\xi\xi} \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial \xi}\right]^{+}_{\mu_\xi}$$

$$\left[\frac{\partial g}{\partial \xi}\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial A_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial A_2} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial A_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial A_2} \end{bmatrix}$$

Si calcolano le derivate:

$$\frac{\partial g_1}{\partial A_1} =$$
$$= \frac{-(1+\tan^2 A_1)(\tan A_2 + \tan A_1) - (\tan A_2 - \tan A_1)(1+\tan^2 A_1)}{(\tan A_1 + \tan A_2)^2} =$$
$$= \frac{-2\tan A_2(1+\tan^2 A_1)}{(\tan A_1 + \tan A_2)^2}$$

$$\left(\frac{\partial g_1}{\partial A_1}\right)_{\mu_\xi} = -1$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial A_2} =$$

$$= \frac{(1+\tan^2 A_2)(\tan A_2 + \tan A_1) - (\tan A_2 - \tan A_1)(1+\tan^2 A_1)}{(\tan A_1 + \tan A_2)^2} =$$

$$= \frac{2\tan A_1(1+\tan^2 A_2)}{(\tan A_1 + \tan A_2)^2}$$

$$\left(\frac{\partial g_1}{\partial A_2}\right)_{\mu_\xi} = 1$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial A_1} = \frac{2\tan^2 A_2(1+\tan^2 A_1)}{(\tan A_1 + \tan A_2)^2}$$

$$\left(\frac{\partial g_2}{\partial A_1}\right)_{\mu_\xi} = 1$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial A_2} = \frac{2\tan^2 A_1(1+\tan^2 A_2)}{(\tan A_1 + \tan A_2)^2}$$

$$\left(\frac{\partial g_2}{\partial A_2}\right)_{\mu_\xi} = 1$$

Poiché la matrice di covarianza $C_{\xi\xi}$ vale:

$$C_{\xi\xi} = 4 \cdot 10^{-12} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} C_{\eta\eta} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} 4 \cdot 10^{-12} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= 4 \cdot 10^{-12} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sigma_x^2 = 8 \cdot 10^{-12} \\ \sigma_y^2 = 8 \cdot 10^{-12} \end{cases}$$

**Esercizio 5.4**

Si producono sbarrette cilindriche di ferro di raggio $R$ e altezza $H$ con le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} R &= 1 \text{ cm } \pm 0.01 \text{ cm} \\ H &= 10 \text{ cm } \pm 0.01 \text{ cm} \end{aligned}$$

La densità del ferro è:

$$\rho = 7.86 \pm 0.01 \text{ gr/cm}^3$$

Si determini il peso delle sbarrette e il suo scarto quadratico medio dell'ipotesi che $R$, $H$ e $\rho$ siano grandezze incorrelate.

**Svolgimento**

Il peso della sbarretta è dato da:

$$P = \rho \pi R^2 H$$

cioè:

$$P = g(R, H, \rho)$$

con:

$$\begin{aligned} E\{R\} &= 1 \text{ cm} \\ E\{H\} &= 10 \text{ cm} \\ E\{\rho\} &= 7.86 \text{ g/cm}^3 \end{aligned}$$

La media di $P$ vale:

$$E\{P\} = 7.86 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 10 = 246.9292 \text{ g}$$

La matrice di covarianza $C_{PP}$ è data da:

$$C_{PP} = \left[\frac{\partial g}{\partial \xi}\right]_{\mu_\xi} \cdot C_{\xi\xi} \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial \xi}\right]^+_{\mu_\xi}$$

$$C_{\xi\xi} = \begin{bmatrix} \sigma_R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_H^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\rho^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial R}\right)_{\mu_\xi} = 2\rho\pi RH = 20 \cdot 7.86 \cdot \pi$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial H}\right)_{\mu_\xi} = \rho\pi R^2 = 7.86 \cdot \pi \cdot 1 = 7.86 \cdot \pi$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \rho}\right)_{\mu_\xi} = \pi R^2 H = 10 \cdot \pi$$

$$\left[\frac{\partial g}{\partial \xi}\right]_{\mu_\xi} = \pi \begin{bmatrix} 20 \cdot 7.86 \\ 7.86 \\ 10 \end{bmatrix}^+$$

$$C_{PP} = 24.5493 \text{ g}^2 = \sigma_P^2$$

$$\sigma_P = 4.9547 \text{ g}$$

## Esercizio 5.5

Sia $U$ una variabile casuale uniformemente distribuita sull'intervallo $[0.0,\ 0.1]$. Si consideri la variabile casuale

$$\underline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-U} \\ e^{-2U} \end{bmatrix}$$

a) Si calcolino $\underline{\mu}_\xi$ e $C_{\xi\xi}$ in modo esatto;

b) si calcolino $\underline{\mu}_\xi$ e $C_{\xi\xi}$ con le formule approssimate di propagazione.

**Svolgimento**

Poichè $U$ è distribuita uniformemente si ha:

$$f(U) = K = \frac{1}{0.1 - 0.0} = 10 \ , \quad \text{per } U \in [0.0,\ 0.1] \ .$$

a) Per il teorema della media:

$$\mu_{\underline{\xi}} = \begin{bmatrix} E\{e^{-U}\} \\ E\{e^{-2U}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^{0.1} 10e^{-U}dU \\ \\ \int_0^{0.1} 10e^{-2U}dU \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 0.095163 \\ 0.090635 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$$

$$C_{\xi\xi} = E\{\underline{\xi}\ \underline{\xi}^+\} - \mu_{\underline{\xi}}\mu_{\underline{\xi}}^+$$

Posto:

$$\begin{aligned} \xi_n &= e^{-nU} \qquad && (n = 1, 2) \\ \xi_m &= e^{-mU} \qquad && (m = 1, 2) \end{aligned}$$

si possono calcolare le medie dei prodotti:

$$E\{\xi_n \xi_m\} = E_U\{e^{-nU}e^{-mU}\} = 10 \int_0^{0.1} e^{-(n+m)U}dU = 10\frac{1 - e^{-0.1(n+m)}}{n+m}$$

Risulta quindi ($C_{\underline{\xi\xi}} = [c_{nm}]$):

$$c_{nm} = 10\frac{1 - e^{-0.1(n+m)}}{n+m} - \mu_n\mu_m$$

che calcolati per le diverse coppie di valori $n, m$ danno

$$\begin{aligned} c_{11} &= 7.56 \cdot 10^{-4} \\ c_{22} &= 2.737 \cdot 10^{-3} \\ c_{12} &= 1.438 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

b) Poichè $E\{U\} = 0.05$, dalla relazione approssimata $E\{\underline{\xi}\} \simeq \underline{g}(\mu_U)$ si ha:

$$E\{\underline{\xi}\} \simeq \begin{bmatrix} e^{-E\{U\}} \\ e^{-2E\{U\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-0.05} \\ e^{-0.1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.951229 \\ 0.904837 \end{bmatrix}$$

Per la varianza si ha:

$$C_{\underline{\xi\xi}} \simeq \left[\frac{\partial g}{\partial U}\right]_{U=\mu_U} C_{UU} \left[\frac{\partial g}{\partial U}\right]^+_{U=\mu_U}$$

dove:

$$\left[\frac{\partial g}{\partial U}\right] = \begin{bmatrix} -e^{-U} \\ -2e^{-2U} \end{bmatrix}$$

$$C_{UU} = \sigma_U^2 = \int_0^{0.1} 10U^2 dU - (0.05)^2 = 10\frac{(0.1)^3}{3} - (0.05)^2 = \frac{5}{6} \cdot 10^{-3}$$

Quindi si ottiene:

$$C_{\underline{\xi\xi}} = \sigma_U^2 \begin{bmatrix} -e^{-0.05} \\ -2e^{-0.1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^{-0.05} & -2e^{-0.1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.754 & 1.435 \\ 1.435 & 2.729 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

**Esercizio 5.6**

Sia $X_n = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix}_n$ il vettore di stato che descrive il sistema all'istante $n$. L'equazione di evoluzione abbia la forma:

$$X_{n+1} = AX_n + U_n$$

con:

$X_0$ = dato iniziale (noto esattamente);

$A$ = matrice dinamica del sistema (stazionaria);

$U_n$ = input di cui si suppone che siano dati $E\{U_n\} = u_n$ e

$$E\{\delta U_n \delta U_k^+\} = \delta_{n,k} \cdot C$$

Si vuole conoscere l'evoluzione stocastica di $X$ nel tempo, ovvero $\mu_n = E\{X_n\}$ e $C_{X_n X_k}$.

**Svolgimento**

Sia data l'equazione di evoluzione:

$$X_{n+1} = AX_n + U_n$$

Si usino i seguenti simboli:

$$x_n = E\{X_n\} = \mu_n$$

$$C_{n,k} = E\{\delta X_n \delta X_k^+\} = C_{X_n X_k}$$

Si ponga $x_0 = b$, fisso e noto. La soluzione dell'equazione di evoluzione si scrive:

$$X_{n+1} = A^{n+1}b + \sum_{\ell=0}^{n} A^{n-\ell} U_\ell$$

Da cui [2]:

$$x_{n+1} = E\{X_{n+1}\} = A^{n+1}b + \sum_{\ell=0}^{n} A^{n-\ell} u_\ell = \mu_{n+1}$$

Per quanto riguarda la varianza, supponendo $k \geq n$:

$$\begin{aligned} C_{n,k} &= E\{\delta X_n \delta X_k^+\} = \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{k-1} A^{n-1-\ell} E\{\delta U_\ell \delta U_m^+\}(A^+)^{k-1-m} = \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} A^{n-1-\ell} C (A^+)^{k-1-\ell} \end{aligned}$$

In particolare per $n = k$:

$$C_{n,n} = \sum_{\ell=0}^{n-1} A^{n-1-\ell} C (A^+)^{n-1-\ell}$$

Questa formula non è particolarmente comoda per il calcolo delle $C_{nn}$, $\forall n$. Per questo si può notare che:

$$C_{n+1,n+1} = \sum_{\ell=0}^{n-\ell} A^{n-1} C (A^+)^{n-\ell} + C =$$

[2]Se $|Aa| < q|a|$ $(\forall a;\ q < 1)$ allora $|A^n a| < q^n |a|$ così che $A^n b \to 0$ per $n \to \infty$.

Ció significa che la serie è stabile e l'influenza del valore iniziale sulla media tende a zero nel tempo.

$$
\begin{aligned}
&= A\left\{\sum_{\ell=0}^{n-1} A^{n-1-\ell} C (A^+)^{n-1-\ell}\right\} A^+ + C = \\
&= A C_{n,n} A^+ + C
\end{aligned}
$$

Si ha in questo modo un algoritmo iterativo più comodo. In particolare:

$$
\begin{aligned}
&C_{00} = 0 \qquad (\delta X_0 = 0, \quad \text{perché } X_0 \text{ è noto esattamente}) \\
&C_{11} = C
\end{aligned}
$$

Come ulteriore esercizio si ricavano esplicitamente l'equazione di evoluzione del sistema e gli elementi della matrice di covarianza.

Equazione di evoluzione:

$$
\begin{aligned}
X_{n+1} &= AX_n + U_n = A(AX_{n-1} + U_{n-1}) + U_n = \\
&= A[A(AX_{n-2} + U_{n-2}) + U_{n-1}] + U_n = \ldots = \\
&= A(A(A \ldots (AX_0 + U_0) + \ldots + U_{n-1})) + U_n
\end{aligned}
$$

$$
X_{n+1} = A^{n+1} X_0 + \sum_{\ell=0}^{n} A^{n-\ell} U_\ell = A^{n+1} b + \sum_{\ell=0}^{n} A^{n-\ell} U_\ell
$$

Matrice di covarianza:

$$
\begin{aligned}
C_{n,k} &= E\{\delta X_n \delta X_k^+\} = \\
&= E\left\{\left(A^n b + \sum_{\ell=0}^{k-1} A^{n-1-\ell} U_\ell - A^n b - \sum_{\ell=0}^{k-1} A^{n-1-\ell} u_\ell\right) \cdot \right. \\
&\qquad \left. \cdot \left(A^k b + \sum_{m=0}^{k-1} A^{k-1-m} U_m - A^k b - \sum_{m=0}^{k-1} A^{k-1-m} u_m\right)^+\right\} = \\
&= E\left\{\left(\sum_{\ell=0}^{n-1} A^{n-1-\ell} U_\ell - \sum_{\ell=0}^{n-1} A^{n-1-\ell} u_\ell\right) \cdot \right. \\
&\qquad \left. \cdot \left(\sum_{m=0}^{k-1} A^{k-1-m} U_m - \sum_{m=0}^{k-1} A^{k-1-m} u_m\right)^+\right\} = \\
&= E\left\{\left(\sum_{\ell=0}^{n-1} A^{n-1-\ell} \delta U_\ell\right)\left(\sum_{m=0}^{k-1} A^{k-1-m} \delta U_m\right)^+\right\}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{k-1} A^{n-1-\ell}E\{\delta U_\ell \delta U_m^+\})(A^+)^{k-1-m}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{k-1} A^{n-1-\ell}\delta_{\ell,m}C(A^+)^{k-1-\ell} = \sum_{\ell=0}^{n-1} A^{n-1-\ell}C(A^+)^{k-1-m}$$

## Esercizio 5.7

Si scriva l'evoluzione di un oscillatore armonico inizialmente in quiete, sotto l'azione di un rumore bianco.

**Svolgimento**

Equazione dell'oscillatore:

$$\ddot{x} + \omega x = U$$

con $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ (inizialmente l'oscillatore è in quiete).

$U$ è solo rumore bianco:

$$E\{\underline{U}_n\} = \underline{0}$$

$$E\{\underline{U}_n \underline{U}_k^+\} = \delta_{n,k} \cdot \sigma_U^2$$

Ponendo $\dot{x} = y$ l'equazione si scrive come:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \ddot{x} = -\omega^2 x + U \end{cases}$$

e può essere messa in forma vettoriale:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ U \end{bmatrix}$$

Ciò significa che sarà:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_n + \tau \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_n + \begin{bmatrix} 0 \\ \tau U \end{bmatrix}_n$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{n+1} = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_n + \begin{bmatrix} 0 \\ \tau U \end{bmatrix}_n$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ -\omega^2\tau & 1 \end{bmatrix}$$

Evoluzione della media:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{n+1} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_n + \begin{bmatrix} 0 \\ \tau U \end{bmatrix}_n$$

perchè $E\{\underline{U}_n\} = 0$.

Per la varianza si applica la seguente formula:

$$C_{n+1,n+1} = AC_{n,n}A^+ + C$$

dove $C$ è la matrice di covarianza di $U$:

$$C = \tau^2\sigma_U^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{n+1,n+1} = \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ -\omega^2\tau & 1 \end{bmatrix} C_{n,n} \begin{bmatrix} 1 & -\omega^2\tau \\ \tau & 1 \end{bmatrix} + C$$

Si ha:

$$C_{00} = 0$$

$$C_{11} = AC_{00}A^+ + C = C$$

$$\begin{aligned} C_{22} &= AC_{11}A^+ + C = ACA^+ + C = \\ &= \tau^2\sigma_U^2 \begin{bmatrix} 1 & \tau^2 \\ -\omega^2\tau & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\omega^2\tau \\ \tau & 1 \end{bmatrix} + \tau^2\sigma_U^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \tau^2\sigma_U^2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ -\omega^2\tau & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tau & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \tau^2\sigma_U^2 \begin{bmatrix} \tau^2 & \tau \\ \tau & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \tau^2\sigma_U^2 \begin{bmatrix} \tau^2 & \tau \\ \tau & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C_{\xi\xi} &= \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ -\omega^2\tau & 1 \end{bmatrix} \tau^2\sigma_U^2 \begin{bmatrix} \tau^2 & \tau \\ \tau & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\omega^2\tau \\ \tau & 1 \end{bmatrix} + C = \\
&= \tau^2\sigma_U^2 \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ -\omega^2\tau & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2\tau^2(-\omega^2\tau^3 + \tau) \\ 3\tau(-\omega^2\tau^2 + 2) \end{bmatrix} + C = \\
&= \tau^2\sigma_U^2 \begin{bmatrix} (2\tau^2 + 3\tau^2) & (-\omega^2\tau^3 + \tau - \omega^2\tau^3 + 2\tau) \\ (-2\omega^2\tau^3 + 3\tau) & (\omega^4\tau^4 - \omega^2\tau^2 - \omega^2\tau^2 + 2) \end{bmatrix} + C = \\
&= \tau^2\sigma_U^2 \begin{bmatrix} 5\tau^2 & (-2\omega^2\tau^3 + 3\tau) \\ (-2\omega^2\tau^3 + 3\tau) & (\omega^4\tau^4 - 2\omega^2\tau^2 + 2) \end{bmatrix} + C
\end{aligned}
$$

# Esercizi

### Esercizio 5.8

Determinare media e varianza dell'area del rettangolo avente lati $x$ e $y$ calcolati nell'esercizio 5.2.

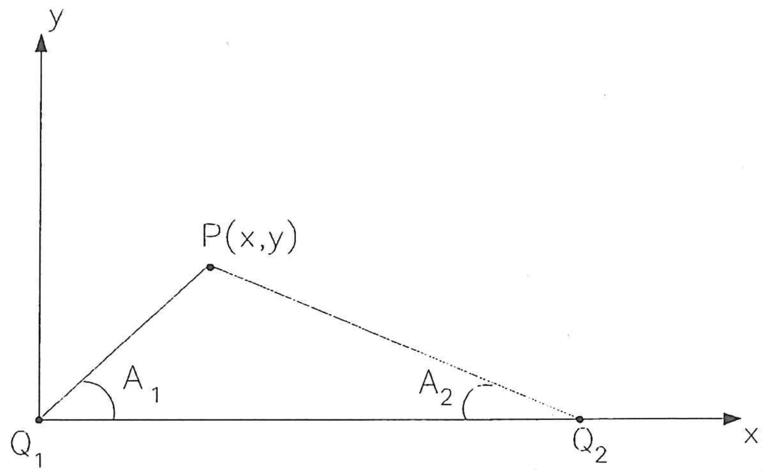
[**R:** $0.4330 \cdot 10^{12}$ mm$^2$ ; $1.75 \cdot 10^{12}$ mm$^4$]

### Esercizio 5.9

Dati due punti di coordinate note:

$$Q_1(0,0), \qquad Q_2(1,0)$$

si sono misurati i due angoli $A_1$ e $A_2$ indipendentemente, con la stessa precisione. Sia $\sigma_{A_1} = \sigma_{A_2} = 2 \cdot 10^{-6}$ rad e $E\{A_1\} = \frac{\pi}{4}$, $E\{A_2\} = \frac{\pi}{6}$.



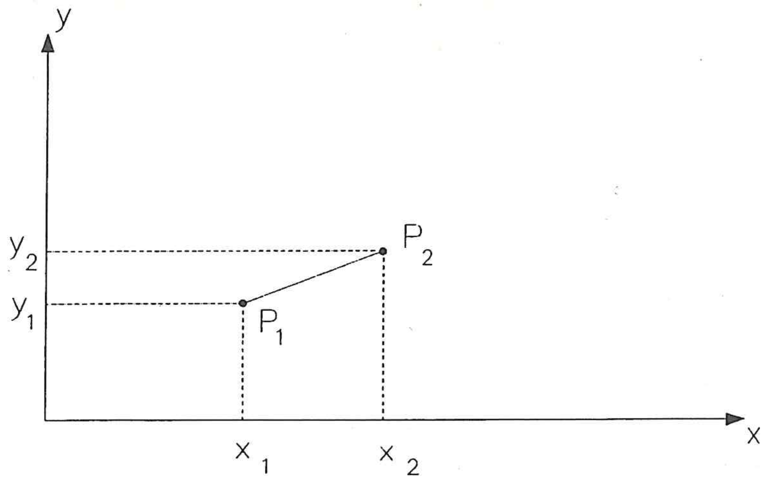

Determinare media e varianza delle coordinate del punto $P$.

[**R:** 0.3660 ; 0.3660 ; $2.0103 \cdot 10^{-12}$ ; $1.4359 \cdot 10^{-12}$]

### Esercizio 5.10

Su un coordinatometro si sono lette le coordinate di due punti:

$$x_1 = 25.17 \text{ mm} \qquad x_2 = 47.32 \text{ mm}$$
$$y_1 = 10.12 \text{ mm} \qquad y_2 = 18.83 \text{ mm}$$




Le coordinate sono misurate con la stessa precisione:

$$\sigma = \sigma_{x_i} = \sigma_{y_i} = 0.02 \text{ mm}$$

Si sa inoltre che sia le $x_i$ che le $y_i$ sono tra loro correlate:

$$\rho_{x_1 x_2} = 0.5 \quad ; \quad \rho_{y_1 y_2} = 0.5$$

mentre le $x_i$ e le $y_i$ sono tra loro incorrelate:

$$\rho_{x_i y_k} = 0 \ .$$

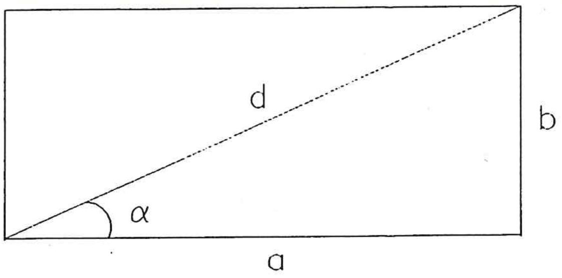
Stimare la distanza $d = \overline{P_1 P_2}$ ed il suo scarto quadratico medio $\sigma_d$.

[**R:** 23.8010 mm ; 0.02 mm]

**Esercizio 5.11**

Del rettangolo in figura si sono misurati in modo indipendente i lati $a$, $b$ ottenendo

$$\begin{aligned} E\{a\} &= 10 \text{ cm} \ ; \qquad \sigma_a = 0.1 \text{ mm} \ ; \\ E\{b\} &= 5 \text{ cm} \ ; \qquad \sigma_b = 0.5 \text{ mm} \ . \end{aligned}$$




Si determinino la diagonale $d$, il perimetro $p$, l'area $A$ e la tangente dell'angolo $\alpha$ con le relative varianze.

[**R:** 11.1803 cm ; 30.00 cm ; 50.00 cm$^2$ ; 0.5 ; $5.7996 \cdot 10^{-4}$ cm$^2$ ; 0.0104 cm$^4$ ; $0.2525 \cdot 10^{-4}$ ].

**Esercizio 5.12**

La conduttività totale $K$ di un sistema di due resistenze in parallelo, $R_1$, $R_2$ è data da:

$$K = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Da misure indipendenti delle due resistenze si sono trovati i seguenti valori:

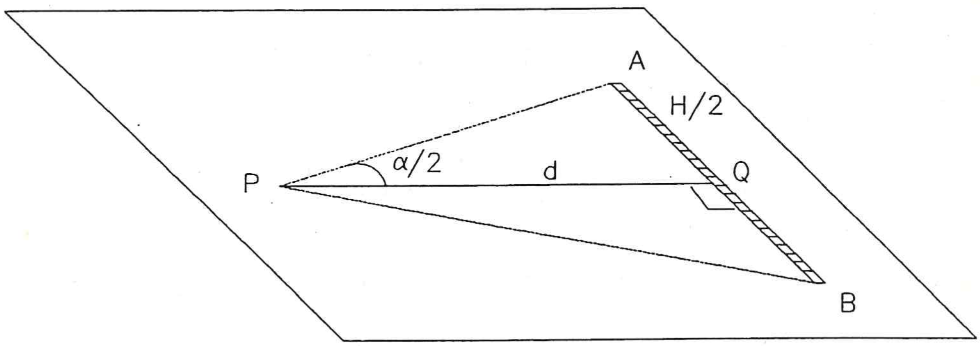
$$R_1 = 300\ \Omega \pm 2.5\ \Omega$$
$$R_2 = 600\ \Omega \pm 1.5\ \Omega$$

Determinare il valore di $K$ con il relativo $\sigma_K$.

[**R:** 0.005 ; $2.8089 \cdot 10^{-5}$].

**Esercizio 5.13**

Per misurare la distanza $d$ tra due punti $P$ e $Q$ si utilizza una stadia orizzontale di lunghezza $H$ perpendicolare a $\overline{PQ}$: a tale scopo si misura l'angolo $\alpha$ sotto cui sono osservati gli estremi $A$ e $B$ della stadia:



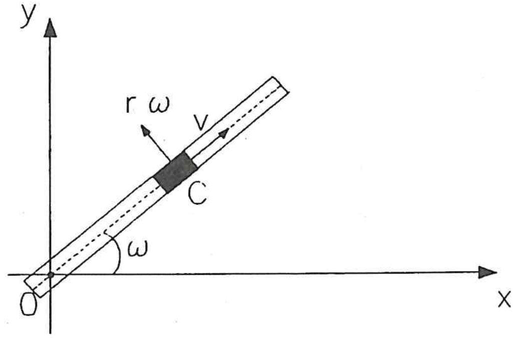

È noto che il legame tra $d$, $\alpha$ ed $H$ è dato da:

$$d = \frac{H}{2\tan\frac{\alpha}{2}}$$

Supponendo di aver misurato $\alpha = 2°30'$ con $\sigma_\alpha = 3''$ e di conoscere $H = 2$ m con $\sigma_H = 0.5$ mm, si ricavi il valore di $d$ e il relativo scarto quadratico medio $\sigma_d$.

[**R:** 45.82935 m ; 0.0191 m].

**Esercizio 5.14**
Un carrello $C$ si muove lungo un braccio rotante; all'istante $t = 0$ il braccio è diretto lungo l'asse $x$ mentre il carrello $C$ è nell'origine.




La velocità lungo il braccio è:

$$v = 1 \text{ m sec}^{-1} + \eta$$

$$E\{\eta\} = 0; \quad \sigma(\eta) = 10 \text{ cm sec}^{-1}$$

La velocità angolare del braccio è:

$$\omega = \frac{\pi}{20} \text{ rad sec}^{-1} + \chi$$

$$E\{\chi\} = 0; \quad \sigma(\chi) = \frac{\pi}{200} \text{ rad sec}^{-1} .$$

La velocità, all'istante $t$, di $C$ è quindi data da:

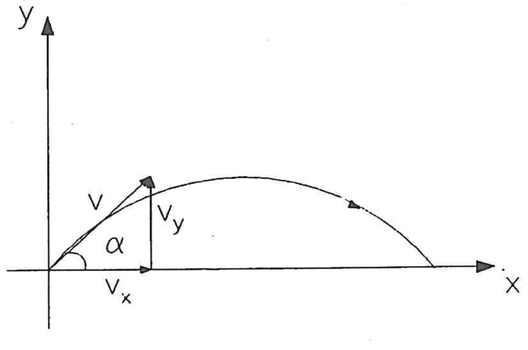
$$\begin{cases} V_x(t) = v \cos \omega t - tv\omega \sin \omega t \\ V_y(t) = v \sin \omega t + tv\omega \cos \omega t \end{cases}$$

Sapendo che $\eta$ e $\chi$ sono variabili stocasticamente indipendenti, si calcoli la matrice di covarianza $C_{VV}$ del vettore $\underline{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}$ al tempo $t = 5$ sec.

[**R:** $C_{VV} = \begin{bmatrix} 2.408752 & -0.848746 \\ -0.848746 & 2.047465 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2}$].

### Esercizio 5.15

Un proiettile è lanciato dall'origine, al tempo $t = 0$, con alzo $\alpha$ e velocità $v$.




Sapendo che

$$\alpha = \frac{\pi}{3} + \delta\alpha$$

$$v = 600 \text{ m sec}^{-1} + \delta v$$

e che $\delta\alpha$, $\delta v$ sono variabili indipendenti con

$$\sigma_\alpha = \frac{\pi}{2000} \text{ rad} , \qquad \sigma_v = 0.5 \text{ m sec}^{-1}$$

si calcolino la gittata $x$ del proiettile ed il suo scarto quadratico medio $\sigma_x$.

Si supponga che l'accelerazione di gravità sia $g = 10$ m sec$^{-2}$ e che il proiettile si muova nel vuoto. Per eseguire il calcolo si usino le equazioni:

$$\begin{cases} x(t) = v_x t \\ y(t) = v_y t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

[**R:** 31176.91 m ; 76.8 m].

### Esercizio 5.16

Nella borsa merci di New York si svolgono, tra l'altro, compravendite di riso e grano. Siano: $U_1$ (in dollari) il prezzo unitario del riso, $Q_1$ (in tonnellate) la quantità giornaliera di riso venduto, $U_2$ il prezzo unitario del grano e $Q_2$ la quantità giornaliera di grano venduta. Il vettore $X^+ = [Q_1, Q_2, U_1, U_2]$ costituisce una quadrupletta di variabili casuali che soddisfano le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} E\{Q_2\} = 2E\{Q_1\} &= 1000 \text{ tonnellate} \\ E\{U_1\} = 2E\{U_2\} &= 200 \text{ dollari} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2_{Q_2} = 2\sigma^2_{Q_1} &= 200 \text{ tonnellate}^2 \\ \sigma^2_{U_1} = 2\sigma^2_{U_2} &= 20 \text{ dollari}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{Q_1 Q_2} &= -0.69 \\ \rho_{U_1 U_2} &= 0.60 \end{aligned}$$

Definite ora le variabili casuali $V$, $M$:

$$\begin{cases} V = Q_1 U_1 + Q_2 U_2 \\ M = Q_1 + Q_2 \end{cases}$$

che rappresentano il valore generale scambiato e la quantità generale venduta, si trovino la media di $Y = \begin{bmatrix} V \\ M \end{bmatrix}$ e la matrice di covarianza di tale vettore.

[**R:** $\begin{bmatrix} 200000 \\ 1500 \end{bmatrix}$ ; $100 \begin{bmatrix} 255820.40751 & 107.25853 \\ 107.25853 & 1.04839 \end{bmatrix}$].

**Esercizio 5.17**

Per il calcolo della sopraelevazione del pennacchio di gas caldi viene proposta in letteratura una relazione del tipo:

$$\Delta h = D \left( \frac{V}{\overline{u}} \right) \left[ 1 + \frac{T_f - T_a}{T_f} \right]$$

essendo $D$ = diametro del camino;

$V$ = velocità di emissione;

$\overline{u}$ = velocità media del vento;

$T_f$ = temperatura degli effluenti;

$T_a$ = temperatura dell'ambiente.

Supponendo che $D = 1.8$ m, $V = (20 \pm 5)$ m/sec, $\overline{u} = (4 \pm 3)$ m/sec, $T_f = (82 \pm 20)$°C, $T_a = (20 \pm 4)$°C e che inoltre le varie osservabili siano tra loro incorrelate, calcolare media e scarto quadratico medio di $\Delta h$.

[**R:** 15.8049 m ; 12.5064 m].

**Esercizio 5.18**

Si consideri una sbarra rettilinea di alluminio di sezione rettangolare (dimensioni $a, b$) lunga $\ell$. Un estremo della sbarra è incastrato, e all'estremo libero è applicato il peso $P$.

La freccia $s$ risultante è data da:

$$s = \frac{4}{E} \frac{P\ell^3}{ba^3}$$

dove:

$E$ = modulo di elasticità dell'alluminio = $6.9\ 10^{10}$ N/m$^2$.

Da una serie di misure risulta:

$$E\{P\} = 500 \text{ N}$$
$$E\{\ell\} = 2.00 \text{ m}$$
$$\sigma_P = 0.01 \text{ N}$$
$$\sigma_\ell = 0.1 \text{ mm}$$

Si suppone di conoscere $a = 5$ cm e $b = 2$ cm con esattezza.

Determinare media e varianza della freccia $s$.

[**R:** 0.0928 m ; 1.40 $10^{-2}$ mm].

**Esercizio 5.19**

E' possibile determinare la portata $P$ (m$^3$/s) di un fluido in un condotto per mezzo di un apparecchio detto tubo di Venturi, tramite due manometri $G_1$ e $G_2$ che misurano rispettivamente la pressione nel condotto e in una strozzatura in esso inserita.

Si ha:

$$P = A_1 A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$

dove:

$p_1, p_2$ = pressioni misurate nel condotto e nella strozzatura (kg/ms$^2$

$A_1, A_2$ = sezioni del condotto e della strozzatura (m$^2$);

$\rho$ = densità del fluido (kg/m$^3$).

Dati

$\rho = 100$ kg/m$^3$ ; $A_1 = 1.0$ m$^2$ ; $A_2 = 0.2$ m$^2$ ;
$E\{p_1\} = 54$ kg/ms$^2$ ; $E\{p_2\} = 23$ kg/ms$^2$ ; $\sigma_{p_1} = \sigma_{p_2} = 1$ kg/ms$^2$,

determinare media e scarto quadratico medio di $P$.

[**R:** 0.1607 m$^3$/s ; 0.0037 m$^3$/s].

**Esercizio 5.20**

Si sono misurate le coordinate polari piane $(\rho, \vartheta)$ di un punto $P$. Sia $\rho = 50$ m e $\vartheta = \frac{\pi}{4}$; si sa inoltre che:

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho &= 0.005 \text{ m} ; \\
\sigma_\vartheta &= 1.57 \cdot 10^{-5} \text{ rad} ; \\
\sigma_{\rho\vartheta} &= 0 .
\end{aligned}$$

Si determinino le coordinate cartesiane $(x, y)$ del punto $P$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

e la loro matrice di covarianza.
[R: $\begin{bmatrix} 35.3553 \\ 35.3553 \end{bmatrix}$ ; $10^{-6} \begin{bmatrix} 12.8081 & 12.1919 \\ 12.1919 & 12.8081 \end{bmatrix}$].

**Esercizio 5.21**

In sismologia si adotta la seguente relazione per determinare la magnitudo di un evento sismico (terremoto):

$$M = A \log_{10} t + B \log_{10} d - C$$

I simboli hanno il seguente significato:

| | |
|---|---|
| $t =$ | durata dell'evento (in secondi); |
| $d =$ | distanza ipocentrale dalla stazione di rilevamento (in chilometri); |
| $A, B, C =$ | coefficienti validi per la stazione dalla quale si è effettuata la rilevazione. |

Si determino la media e lo scarto quadratico medio di $M$, dati i seguenti valori:

$$\begin{aligned}
t &= 34 \text{ sec} \pm 0.5 \\
d &= 137 \text{ Km} \pm 0.2
\end{aligned}$$

$$A = 2.0 \pm 0.2$$
$$B = 0.2 \pm 0.1$$
$$C = 1.5 \pm 0.1$$

[**R:** 1.9903 ; 0.3868].

**Esercizio 5.22**

Si sono misurate le tre componenti di un vettore $\underline{v}$:

$$v_x = 4966.829$$
$$v_y = 2329.157$$
$$v_z = 3160.109$$

in modo tale che:

$$\sigma_{v_x} = \sigma_{v_y} = 2.33$$
$$\sigma_{v_z} = 4.66$$
$$\rho_{v_x v_y} = 0.5$$
$$\rho_{v_x v_z} = \rho_{v_y v_z} = 0$$

Calcolare valore medio e varianza del modulo di $\underline{v}$.

[**R:** 6330.928174 m/s ; 11.053760 m$^2$/s$^2$].

**Esercizio 5.23**

La resistenza equivalente di un dispersore cilindrico si calcola tramite la formula:

$$R_e = \frac{\rho}{2\pi h} \log \frac{2h}{R}$$

$R$ = raggio del dispersore [m];
$h$ = profondità del terreno [m];
$\rho$ = resistività del terreno [$\Omega$m].

Si sono misurati $R$, $h$, $\rho$ ottenendo i seguenti risultati:

$$R = 0.50 \pm 0.01$$
$$h = 2.00 \pm 0.01$$
$$\rho = 700 \pm 100$$

Determinare valore medio e scarto quadratico medio di $R_e$.

[**R:** $115.833690\Omega$ ; $16.587856\Omega$].

**Esercizio 5.24**

Per il costo di installazione di un camino industriale si adotta una relazione del tipo:

$$C_{ic} = ac_1 h^m D^n$$

essendo:

$$\begin{aligned} a &= \text{fattore annuo di ammortamento;} \\ c_1 &= \text{costo unitario del camino dipendente dal tipo di materiale} \\ &\phantom{=} \text{utilizzato per la costruzione;} \\ h &= \text{altezza camino;} \\ D &= \text{diametro interno;} \\ m, n &= \text{esponenti deducibili da funzioni di costo ricavabili da dati} \\ &\phantom{=} \text{di mercato.} \end{aligned}$$

Si supponga che:

$$\begin{aligned} a &= 0.6 \\ c_1 &= 3 \pm 1(\text{ milioni di lire}) \\ m &= 0.32 \pm 0.01 \\ n &= 1.40 \pm 0.2 \\ h &= 100 \text{ m} \\ D &= 5 \text{ m} \end{aligned}$$

e che $m$ ed $n$ siano correlati tra loro con indice di correlazione:

$$\rho_{mn} = 0.3$$

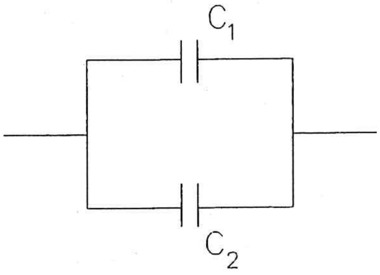
Si determinino media e scarto quadratico medio di $C_{ic}$.

[**R:** 74.7877 milioni di lire; 35.5330 milioni di lire].

### Esercizio 5.25

Due condensatori di capacità $C_1$ e $C_2$ messi in parallelo danno luogo a un sistema la cui capacità complessiva $C$ è data da:

$$C = C_1 + C_2$$




Dati i valori di $C_1$ e $C_2$:

$$C_1 = 8\ \mu\text{F} \pm 0.02\ \mu\text{F}$$
$$C_2 = 6\ \mu\text{F} \pm 0.01\ \mu\text{F}$$

determinare il valore di $C$ e il suo scarto quadratico medio.

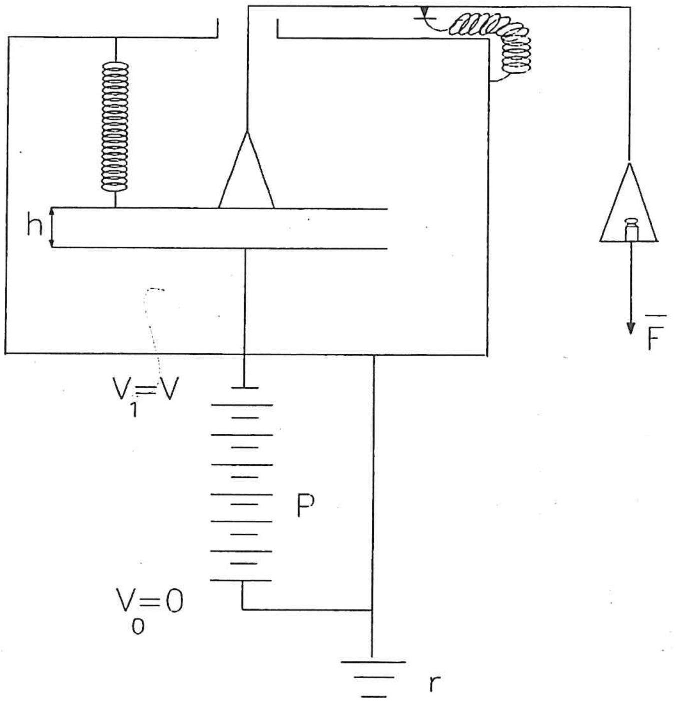
[**R:** 14 $\mu$F ; $2.236068 \cdot 10^{-2}$ $\mu$F].

### Esercizio 5.26

Per mezzo di un elettrometro assoluto è possibile la misura di

$$V = h\sqrt{\frac{8\pi F}{K_{el,o}\Delta A}} = V = V(F, h, \Delta A)$$

essendo $\Delta A$ l'area del piatto mobile dell'elettrometro, $h$ la distanza tra i piatti, $F$ la forza ponderomotrice tra le armature.




Si supponga di eseguire un esperimento nelle seguenti condizioni:

$$\overline{\Delta A} = 0.01 \text{ m}^2$$
$$\overline{h} = 0.01 \text{ m}$$
$$\overline{F} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ newton}$$
$$K_{el,o} = 1.112 \cdot 10^{-10}$$

e si determini $\overline{V}$.

Sapendo inoltre che:

$$\sigma_{\Delta A} = 10^{-6} \text{ m}^2$$
$$\sigma_F = 10^{-6} \text{ newton}$$
$$\sigma_h = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

e supponendo le misure indipendenti tra loro si calcoli $\sigma_V$.

[**R:** 3006.7515 ; 6.0271].

### Esercizio 5.27

Il coefficiente di attrito interno dell'alcool etilico può essere determinato, mediante un viscosimetro, per confronto con il tempo di efflusso di un liquido di riferimento.

Si supponga di usare come liquido di riferimento dell'acqua distillata e di eseguire l'esperienza a 20 °C. La legge che fornisce il coefficiente di attrito interno dell'alcool etilico è:

$$\eta = \eta_A \frac{\delta}{\delta_A} \frac{\Delta t}{\Delta t_A}$$

essendo:

$$\begin{aligned} \eta_A &= \text{coefficiente di attrito interno dell'acqua a 20 °C} = 0.01 \text{ poise;} \\ \delta &= \text{densità alcool etilico a 20 °C} \simeq 0.790 \text{ g/cm}^3\text{;} \\ \delta_A &= \text{densità acqua distillata a 20 °C} \simeq 0.998 \text{ g/cm}^3. \end{aligned}$$

Si eseguono quattro misure indipendenti dei tempi di efflusso sia per l'acqua distillata che per l'alcool etilico, ottenendo:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta t$ (sec) | 50 | 49.8 | 49.7 | 50.6 |
| $\Delta t_A$ (sec) | 77 | 77.3 | 76.9 | 77.8 |

Determinare media e scarto quadratico medio di $\eta$.

[**R:** $0.512608 \cdot 10^{-2}$ ; $3.152726 \cdot 10^{-4}$].

### Esercizio 5.28

Sia dato il sistema lineare monodimensionale:

$$X_{n+1} = aX_n + U_n \ .$$

Nelle ipotesi che:

$$|a| < 1 \ ; \ X_0 = b$$

$$u_n = \begin{cases} u_0 > 0 & (n = 0) \quad \sigma^2_{U_n} = c > 0 \\ 0 & (n > 0) \end{cases}$$

determinare l'evoluzione della media e della varianza.

# APPENDICE: Tabelle

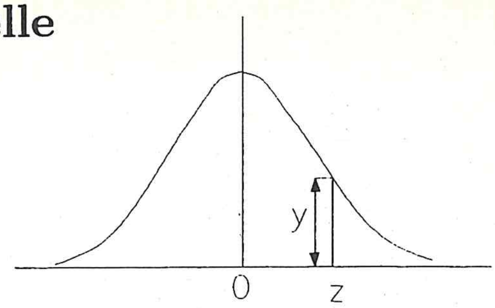



Tabella 1 - $y$ = ordinata della curva normale standardizzata in $z$.

| $z$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | .3989 | .3989 | .3989 | .3988 | .3986 | .3984 | .3982 | .3980 | .3977 | .3973 |
| 0.1 | .3970 | .3965 | .3961 | .3956 | .3951 | .3945 | .3939 | .3932 | .3925 | .3918 |
| 0.2 | .3910 | .3902 | .3894 | .3885 | .3876 | .3867 | .3857 | .3847 | .3836 | .3825 |
| 0.3 | .3814 | .3802 | .3790 | .3778 | .3765 | .3752 | .3739 | .3725 | .3712 | .3697 |
| 0.4 | .3683 | .3668 | .3653 | .3637 | .3621 | .3605 | .3589 | .3572 | .3555 | .3538 |
| 0.5 | .3521 | .3503 | .3485 | .3467 | .3448 | .3429 | .3410 | .3391 | .3372 | .3352 |
| 0.6 | .3332 | .3312 | .3292 | .3271 | .3251 | .3230 | .3209 | .3187 | .3166 | .3144 |
| 0.7 | .3123 | .3101 | .3079 | .3056 | .3034 | .3011 | .2989 | .2966 | .2943 | .2920 |
| 0.8 | .2897 | .2874 | .2850 | .2827 | .2803 | .2780 | .2756 | .2732 | .2709 | .2685 |
| 0.9 | .2661 | .2637 | .2613 | .2589 | .2565 | .2541 | .2516 | .2492 | .2468 | .2444 |
| 1.0 | .2420 | .2396 | .2371 | .2347 | .2323 | .2299 | .2275 | .2251 | .2227 | .2203 |
| 1.1 | .2179 | .2155 | .2131 | .2107 | .2083 | .2059 | .2036 | .2012 | .1989 | .1965 |
| 1.2 | .1942 | .1919 | .1895 | .1872 | .1849 | .1826 | .1804 | .1781 | .1758 | .1736 |
| 1.3 | .1714 | .1691 | .1669 | .1647 | .1626 | .1604 | .1582 | .1561 | .1539 | .1518 |
| 1.4 | .1497 | .1476 | .1456 | .1435 | .1415 | .1394 | .1374 | .1354 | .1334 | .1315 |
| 1.5 | .1295 | .1276 | .1257 | .1238 | .1219 | .1200 | .1182 | .1163 | .1145 | .1127 |
| 1.6 | .1109 | .1092 | .1074 | .1057 | .1040 | .1023 | .1006 | .0989 | .0973 | .0957 |
| 1.7 | .0940 | .0925 | .0909 | .0893 | .0878 | .0863 | .0848 | .0833 | .0818 | .0804 |
| 1.8 | .0790 | .0775 | .0761 | .0748 | .0734 | .0721 | .0707 | .0694 | .0681 | .0669 |
| 1.9 | .0656 | .0644 | .0632 | .0620 | .0608 | .0596 | .0584 | .0573 | .0562 | .0551 |
| 2.0 | .0540 | .0529 | .0519 | .0508 | .0498 | .0488 | .0478 | .0468 | .0459 | .0449 |
| 2.1 | .0440 | .0431 | .0422 | .0413 | .0404 | .0396 | .0387 | .0379 | .0371 | .0363 |
| 2.2 | .0355 | .0347 | .0339 | .0332 | .0325 | .0317 | .0310 | .0303 | .0297 | .0290 |
| 2.3 | .0283 | .0277 | .0270 | .0264 | .0258 | .0252 | .0246 | .0241 | .0235 | .0229 |
| 2.4 | .0224 | .0219 | .0213 | .0208 | .0203 | .0198 | .0194 | .0189 | .0184 | .0180 |
| 2.5 | .0175 | .0171 | .0167 | .0163 | .0158 | .0154 | .0151 | .0147 | .0143 | .0139 |
| 2.6 | .0136 | .0132 | .0129 | .0126 | .0122 | .0119 | .0116 | .0113 | .0110 | .0107 |
| 2.7 | .0104 | .0101 | .0099 | .0096 | .0093 | .0091 | .0088 | .0086 | .0084 | .0081 |
| 2.8 | .0079 | .0077 | .0075 | .0073 | .0071 | .0069 | .0067 | .0065 | .0063 | .0061 |
| 2.9 | .0060 | .0058 | .0056 | .0055 | .0053 | .0051 | .0050 | .0048 | .0047 | .0046 |
| 3.0 | .0044 | .0043 | .0042 | .0040 | .0039 | .0038 | .0037 | .0036 | .0035 | .0034 |
| 3.1 | .0033 | .0032 | .0031 | .0030 | .0029 | .0028 | .0027 | .0026 | .0025 | .0025 |
| 3.2 | .0024 | .0023 | .0022 | .0022 | .0021 | .0020 | .0020 | .0019 | .0018 | .0018 |
| 3.3 | .0017 | .0017 | .0016 | .0016 | .0015 | .0015 | .0014 | .0014 | .0013 | .0013 |
| 3.4 | .0012 | .0012 | .0012 | .0011 | .0011 | .0010 | .0010 | .0010 | .0009 | .0009 |
| 3.5 | .0009 | .0008 | .0008 | .0008 | .0008 | .0007 | .0007 | .0007 | .0007 | .0006 |
| 3.6 | .0006 | .0006 | .0006 | .0005 | .0005 | .0005 | .0005 | .0005 | .0005 | .0004 |
| 3.7 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 |
| 3.8 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 |
| 3.9 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0001 | .0001 |

Tabella 2 - Aree sottese dalla curva normale standardizzata.

| $z$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | .0000 | .0040 | .0080 | .0120 | .0160 | .0199 | .0239 | .0279 | .0319 | .0359 |
| 0.1 | .0398 | .0438 | .0478 | .0517 | .0557 | .0596 | .0636 | .0675 | .0714 | .0754 |
| 0.2 | .0793 | .0832 | .0871 | .0910 | .0948 | .0987 | .1026 | .1064 | .1103 | .1141 |
| 0.3 | .1179 | .1217 | .1255 | .1293 | .1331 | .1368 | .1406 | .1443 | .1480 | .1517 |
| 0.4 | .1554 | .1591 | .1628 | .1664 | .1700 | .1736 | .1772 | .1808 | .1844 | .1879 |
| 0.5 | .1915 | .1950 | .1985 | .2019 | .2054 | .2088 | .2123 | .2157 | .2190 | .2224 |
| 0.6 | .2258 | .2291 | .2324 | .2357 | .2389 | .2422 | .2454 | .2486 | .2518 | .2549 |
| 0.7 | .2580 | .2612 | .2642 | .2673 | .2704 | .2734 | .2764 | .2794 | .2823 | .2852 |
| 0.8 | .2881 | .2910 | .2939 | .2967. | .2996 | .3023 | .3051 | .3078 | .3106 | .3133 |
| 0.9 | .3159 | .3186 | .3212 | .3238 | .3264 | .3289 | .3315 | .3340 | .3365 | .3389 |
| 1.0 | .3413 | .3438 | .3461 | .3485 | .3508 | .3531 | .3554 | .3577 | .3599 | .3621 |
| 1.1 | .3643 | .3665 | .3686 | .3708 | .3729 | .3749 | .3770 | .3790 | .3810 | .3830 |
| 1.2 | .3849 | .3869 | .3888 | .3907 | .3925 | .3944 | .3962 | .3980 | .3997 | .4015 |
| 1.3 | .4032 | .4049 | .4066 | .4082 | .4099 | .4115 | .4131 | .4147 | .4162 | .4177 |
| 1.4 | .4192 | .4207 | .4222 | .4236 | .4251 | .4265 | .4279 | .4292 | .4306 | .4319 |
| 1.5 | .4332 | .4345 | .4357 | .4370 | .4382 | .4394 | .4406 | .4418 | .4429 | .4441 |
| 1.6 | .4452 | .4463 | .4474 | .4484 | .4495 | .4505 | .4515 | .4525 | .4535 | .4545 |
| 1.7 | .4554 | .4564 | .4573 | .4582 | .4591 | .4599 | .4608 | .4616 | .4625 | .4633 |
| 1.8 | .4641 | .4649 | .4656 | .4664 | .4671 | .4678 | .4686 | .4693 | .4699 | .4706. |
| 1.9 | .4713 | .4719 | .4726 | .4732 | .4738 | .4744 | .4750 | .4756 | .4761 | .4767 |
| 2.0 | .4772 | .4778 | .4783 | .4788 | .4793 | .4798 | .4803 | .4808 | .4812 | .4817 |
| 2.1 | .4821 | .4826 | .4830 | .4834 | .4838 | .4842 | .4846 | .4850 | .4854 | .4857 |
| 2.2 | .4861 | .4864 | .4868 | .4871 | .4875 | .4878 | .4881 | .4884 | .4887 | .4890 |
| 2.3 | .4893 | .4896 | .4898 | .4901 | .4904 | .4906 | .4909 | .4911 | .4913 | .4916 |
| 2.4 | .4918 | .4920 | .4922 | .4925 | .4927 | .4929 | .4931 | .4932 | .4934 | .4936 |
| 2.5 | .4938 | .4940 | .4941 | .4943 | .4945 | .4946 | .4948 | .4949 | .4951 | .4952 |
| 2.6 | .4953 | .4955 | .4956 | .4957 | .4959 | .4960 | .4961 | .4962 | .4963 | .4964 |
| 2.7 | .4965 | .4966 | .4967 | .4968 | .4969 | .4970 | .4971 | .4972 | .4973 | .4974 |
| 2.8 | .4974 | .4975 | .4976 | .4977 | .4977 | .4978 | .4979 | .4979 | .4980 | .4981 |
| 2.9 | .4981 | .4982 | .4982 | .4983 | .4984 | .4984 | .4985 | .4985 | .4986 | .4986 |
| 3.0 | .4987 | .4987 | .4987 | .4988 | .4988 | .4989 | .4989 | .4989 | .4990 | .4990 |
| 3.1 | .4990 | .4991 | .4991 | .4991 | .4992 | .4992 | .4992 | .4992 | .4993 | .4993 |
| 3.2 | .4993 | .4993 | .4994 | .4994 | .4994 | .4994 | .4994 | .4995 | .4995 | .4995 |
| 3.3 | .4995 | .4995 | .4995 | .4996 | .4996 | .4996 | .4996 | .4996 | .4996 | .4997 |
| 3.4 | .4997 | .4997 | .4997 | .4997 | .4997 | .4997 | .4997 | .4997 | .4997 | .4998 |
| 3.5 | .4998 | .4998 | .4998 | .4998 | .4998 | .4998 | .4998 | .4998 | .4998 | .4998 |
| 3.6 | .4998 | .4998 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 |
| 3.7 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 |
| 3.8 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 | .4999 |
| 3.9 | .5000 | .5000 | .5000 | .5000 | .5000 | .5000 | .5000 | .5000 | .5000 | .5000 |

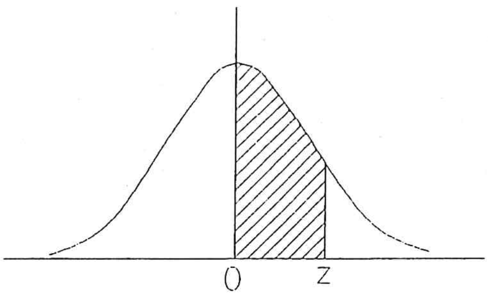
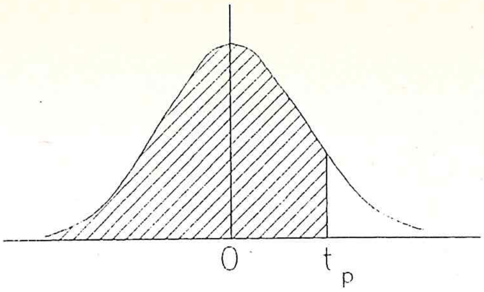
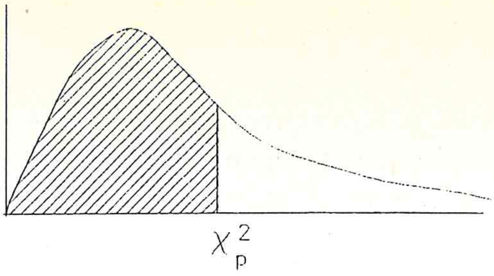


Tabella 3 - Valori percentuali ($t_p$) per la distribuzione $t$ di Student con $\nu$ gradi di libertà (area tratteggiata = $p$).




| $\nu$ | $t_{.995}$ | $t_{.99}$ | $t_{.975}$ | $t_{.95}$ | $t_{.90}$ | $t_{.80}$ | $t_{.75}$ | $t_{.70}$ | $t_{.60}$ | $t_{.55}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 63.66 | 31.82 | 12.71 | 6.31 | 3.08 | 1.376 | 1.000 | .727 | .325 | .158 |
| 2 | 9.92 | 6.96 | 4.30 | 2.92 | 1.89 | 1.061 | .816 | .617 | .289 | .142 |
| 3 | 5.84 | 5.54 | 3.18 | 2.35 | 1.64 | .978 | .765 | .584 | .277 | .137 |
| 4 | 4.60 | 3.75 | 2.78 | 2.13 | 1.53 | .941 | .741 | .569 | .271 | .134 |
| 5 | 4.03 | 3.36 | 2.57 | 2.02 | 1.48 | .920 | .727 | .559 | .267 | .132 |
| 6 | 3.71 | 3.14 | 2.45 | 1.94 | 1.44 | .906 | .718 | .553 | .265 | .131 |
| 7 | 3.50 | 3.00 | 2.36 | 1.90 | 1.42 | .896 | .711 | .549 | .263 | .130 |
| 8 | 3.36 | 2.90 | 2.31 | 1.86 | 1.40 | .889 | .706 | .546 | .262 | .130 |
| 9 | 3.25 | 2.82 | 2.26 | 1.83 | 1.38 | .883 | .703 | .543 | .261 | .129 |
| 10 | 3.17 | 2.76 | 2.23 | 1.81 | 1.37 | .879 | .700 | .542 | .260 | .129 |
| 11 | 3.11 | 2.72 | 2.20 | 1.80 | 1.36 | .876 | .697 | .540 | .260 | .129 |
| 12 | 3.06 | 2.68 | 2.18 | 1.78 | 1.36 | .873 | .695 | .539 | .259 | .128 |
| 13 | 3.01 | 2.65 | 2.16 | 1.77 | 1.35 | .870 | .694 | .538 | .259 | .128 |
| 14 | 2.98 | 2.62 | 2.14 | 1.76 | 1.34 | .868 | .692 | .537 | .258 | .128 |
| 15 | 2.95 | 2.60 | 2.13 | 1.75 | 1.34 | .866 | .691 | .536 | .258 | .128 |
| 16 | 2.92 | 2.58 | 2.12 | 1.75 | 1.34 | .865 | .690 | .535 | .258 | .128 |
| 17 | 2.90 | 2.57 | 2.11 | 1.74 | 1.33 | .863 | .689 | .534 | .257 | .128 |
| 18 | 2.88 | 2.55 | 2.10 | 1.73 | 1.33 | .862 | .688 | .534 | .257 | .127 |
| 19 | 2.86 | 2.54 | 2.09 | 1.73 | 1.33 | .861 | .688 | .533 | .257 | .127 |
| 20 | 2.84 | 2.53 | 2.09 | 1.72 | 1.32 | .860 | .687 | .533 | .257 | .127 |
| 21 | 2.83 | 2.52 | 2.08 | 1.72 | 1.32 | .859 | .686 | .532 | .257 | .127 |
| 22 | 2.82 | 2.51 | 2.07 | 1.72 | 1.32 | .858 | .686 | .532 | .256 | .127 |
| 23 | 2.81 | 2.50 | 2.07 | 1.71 | 1.32 | .858 | .685 | .532 | .256 | .127 |
| 24 | 2.80 | 2.49 | 2.06 | 1.71 | 1.32 | .857 | .685 | .531 | .256 | .127 |
| 25 | 2.79 | 2.48 | 2.06 | 1.71 | 1.32 | .856 | .684 | .531 | .256 | .127 |
| 26 | 2.78 | 2.48 | 2.06 | 1.71 | 1.32 | .856 | .684 | .531 | .256 | .127 |
| 27 | 2.77 | 2.47 | 2.05 | 1.70 | 1.31 | .856 | .684 | .531 | .256 | .127 |
| 28 | 2.76 | 2.47 | 2.05 | 1.70 | 1.31 | .856 | .683 | .530 | .256 | .127 |
| 29 | 2.76 | 2.46 | 2.04 | 1.70 | 1.31 | .854 | .683 | .530 | .256 | .127 |
| 30 | 2.75 | 2.46 | 2.04 | 1.70 | 1.31 | .854 | .683 | .530 | .256 | .127 |
| 40 | 2.70 | 2.42 | 2.02 | 1.68 | 1.30 | .851 | .681 | .529 | .255 | .126 |
| 60 | 2.66 | 2.39 | 2.00 | 1.67 | 1.30 | .848 | .679 | .527 | .254 | .126 |
| 120 | 2.62 | 2.36 | 1.98 | 1.66 | 1 29 | .845 | .677 | .526 | .254 | .126 |
| $\infty$ | 2.58 | 2.33 | 1.96 | 1.645 | 1.28 | .842 | .674 | .524 | .253 | .126 |

Tabella 4a - Valori percentuali ($\chi^2_p$) per la distribuzione $\chi^2$ con $\nu$ gradi di libertà (area tratteggiata = $p$).

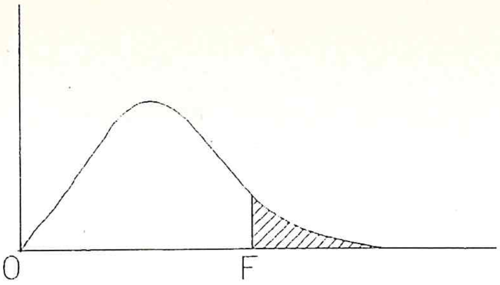



| $\nu$ | $\chi^2_{.995}$ | $\chi^2_{.99}$ | $\chi^2_{.975}$ | $\chi^2_{.95}$ | $\chi^2_{.90}$ | $\chi^2_{.75}$ | $\chi^2_{.50}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7.88 | 6.33 | 5.02 | 3.84 | 2.71 | 1.32 | .455 |
| 2 | 10.6 | 9.21 | 7.38 | 5.99 | 4.61 | 2.77 | 1.39 |
| 3 | 12.8 | 11.3 | 9.35 | 7.81 | 6.25 | 4.11 | 2.37 |
| 4 | 14.9 | 13.3 | 11.1 | 9.4 | 7.78 | 5.39 | 3.36 |
| 5 | 16.7 | 15.1 | 12.8 | 11.1 | 9.24 | 6.63 | 4.35 |
| 6 | 18.5 | 16.8 | 14.4 | 12.6 | 10.6 | 7.84 | 5.35 |
| 7 | 20.3 | 18.5 | 16.0 | 14.1 | 12.0 | 9.04 | 6.35 |
| 8 | 22.0 | 20.1 | 17.5 | 15.5 | 13.4 | 10.2 | 7.34 |
| 9 | 23.6 | 21.7 | 19.0 | 16.9 | 14.7 | 11.4 | 8.34 |
| 10 | 25.2 | 23.2 | 20.5 | 18.3 | 16.0 | 12.5 | 9.34 |
| 11 | 26.8 | 24.7 | 21.9 | 19.7 | 17.3 | 13.7 | 10.3 |
| 12 | 28.3 | 26.2 | 23.3 | 21.0 | 18.5 | 14.8 | 11.3 |
| 13 | 29.8 | 27.7 | 24.7 | 22.4 | 19.8 | 16.0 | 12.3 |
| 14 | 31.3 | 29.1 | 26.1 | 23.7 | 21.1 | 17.1 | 13.3 |
| 15 | 32.8 | 30.6 | 27.5 | 25.0 | 22.3 | 18.2 | 14.3 |
| 16 | 34.3 | 32.0 | 28.8 | 26.3 | 23.5 | 19.4 | 15.3 |
| 17 | 35.7 | 33.4 | 30.2 | 27.6 | 24.8 | 20.5 | 16.3 |
| 18 | 37.2 | 34.8 | 31.5 | 28.9 | 26.0 | 21.6 | 17.3 |
| 19 | 38.6 | 36.2 | 32.9 | 30.1 | 27.2 | 22.7 | 18.3 |
| 20 | 40.0 | 37.6 | 34.2 | 31.4 | 28.4 | 23.8 | 19.3 |
| 21 | 41.4 | 38.9 | 35.5 | 32.7 | 29.6 | 24.9 | 20.3 |
| 22 | 42.8 | 40.3 | 36.8 | 33.9 | 30.8 | 26.0 | 21.3 |
| 23 | 44.2 | 41.6 | 38.1 | 35.2 | 32.0 | 27.1 | 22.3 |
| 24 | 45.6 | 43.0 | 39.4 | 36.4 | 33.2 | 28.2 | 23.3 |
| 25 | 46.9 | 44.3 | 40.6 | 37.7 | 34.4 | 29.3 | 24.3 |
| 26 | 48.3 | 45.6 | 41.9 | 38.9 | 35.6 | 30.4 | 25.3 |
| 27 | 49.6 | 47.0 | 43.2 | 40.1 | 36.7 | 31.5 | 26.3 |
| 28 | 51.0 | 48.3 | 44.5 | 41.3 | 37.9 | 32.6 | 27.3 |
| 29 | 52.3 | 49.6 | 45.7 | 42.6 | 39.1 | 33.7 | 28.3 |
| 30 | 53.7 | 50.9 | 47.0 | 43.8 | 40.3 | 34.8 | 29.3 |
| 40 | 66.8 | 63.7 | 59.3 | 55.8 | 51.8 | 45.6 | 39.3 |
| 50 | 79.5 | 76.2 | 71.4 | 67.5 | 63.2 | 56.3 | 49.3 |
| 60 | 92.0 | 88.4 | 83.3 | 79.1 | 74.4 | 67.0 | 59.3 |
| 70 | 104.2 | 100.4 | 95.0 | 90.5 | 85.5 | 77.6 | 69.3 |
| 80 | 116.3 | 112.3 | 106.6 | 101.9 | 96.6 | 88.1 | 79.3 |
| 90 | 128.3 | 124.1 | 118.1 | 113.1 | 107.6 | 98.5 | 89.3 |
| 100 | 140.2 | 135.8 | 129.6 | 124.3 | 118.5 | 109.1 | 99.3 |

Tabella 4b - (segue Tabella 4a)

| $\nu$ | $\chi^2_{.25}$ | $\chi^2_{.10}$ | $\chi^2_{.05}$ | $\chi^2_{.025}$ | $\chi^2_{.01}$ | $\chi^2_{.005}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | .102 | .0158 | .0039 | .0010 | .0002 | .0000 |
| 2 | .575 | .211 | .103 | .0506 | .0201 | .0100 |
| 3 | 1.21 | .584 | .352 | .216 | .115 | .072 |
| 4 | 1.92 | 1.06 | .711 | .484 | .297 | .207 |
| 5 | 2.67 | 1.61 | 1.15 | .831 | .554 | .412 |
| 6 | 3.45 | 2.20 | 1.64 | 1.24 | .872 | .676 |
| 7 | 4.25 | 2.83 | 2.17 | 1.69 | 1.24 | .989 |
| 8 | 5.07 | 3.49 | 2.73 | 2.18 | 1.65 | 1.34 |
| 9 | 5.90 | 4.17 | 3.33 | 2.70 | 2.09 | 1.73 |
| 10 | 6.74 | 4.87 | 3.94 | 3.25 | 2.56 | 2.16 |
| 11 | 7.58 | 5.58 | 4.57 | 3.82 | 3.05 | 2.60 |
| 12 | 8.44 | 6.30 | 5.23 | 4.40 | 3.57 | 3.07 |
| 13 | 9.30 | 7.04 | 5.89 | 5.01 | 4.11 | 3.57 |
| 14 | 10.2 | 7.79 | 6.57 | 5.63 | 4.66 | 4.07 |
| 15 | 11.0 | 8.55 | 7.26 | 6.26 | 5.23 | 4.60 |
| 16 | 11.9 | 9.31 | 7.92 | 6.91 | 5.81 | 5.14 |
| 17 | 12.8 | 10.1 | 8.67 | 7.56 | 6.41 | 5.70 |
| 18 | 13.7 | 10.9 | 9.39 | 8.23 | 7.01 | 6.26 |
| 19 | 14.6 | 11.7 | 10.1 | 8.91 | 7.63 | 6.84 |
| 20 | 15.5 | 12.4 | 10.9 | 9.59 | 8.26 | 7.43 |
| 21 | 16.3 | 13.2 | 11.6 | 10.3 | 8.90 | 8.03 |
| 22 | 17.2 | 14.0 | 12.3 | 11.0 | 9.54 | 8.64 |
| 23 | 18.1 | 14.8 | 13.1 | 11.7 | 10.2 | 9.26 |
| 24 | 19.0 | 15.7 | 13.8 | 12.4 | 10.9 | 9.89 |
| 25 | 19.9 | 16.5 | 14.6 | 13.1 | 11.5 | 10.5 |
| 26 | 20.8 | 17.3 | 15.4 | 13.8 | 12.2 | 11.2 |
| 27 | 21.7 | 18.1 | 16.2 | 14.6 | 12.9 | 11.8 |
| 28 | 22.7 | 18.9 | 16.9 | 15.3 | 13.6 | 12.5 |
| 29 | 23.6 | 19.8 | 17.7 | 16.0 | 14.3 | 13.1 |
| 30 | 24.5 | 20.6 | 18.5 | 16.8 | 15.0 | 13.8 |
| 40 | 33.7 | 29.1 | 26.5 | 24.4 | 22.2 | 20.7 |
| 50 | 42.9 | 37.7 | 34.8 | 32.4 | 29.7 | 28.0 |
| 60 | 52.3 | 46.5 | 43.2 | 40.5 | 37.5 | 35.5 |
| 70 | 61.7 | 55.3 | 51.7 | 48.8 | 45.4 | 43.3 |
| 80 | 71.1 | 64.3 | 60.4 | 57.2 | 53.5 | 51.2 |
| 90 | 80.6 | 73.3 | 69.1 | 65.6 | 61.8 | 59.2 |
| 100 | 90.1 | 82.4 | 77.9 | 74.2 | 70.1 | 67.3 |

Tabella 5a - Distribuzione della $F$ di Fischer per $\alpha = 1\%$, $\nu_1 =$ gradi di libertà del numeratore, $\nu_2 =$ gradi di libertà del denominatore.




| $\nu_1 \rightarrow$ / $\nu_2 \downarrow$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4052 | 4999.5 | 5403 | 5625 | 5764 | 5859 | 5928 | 5982 | 6022 | 6056 |
| 2 | 98.50 | 99.00 | 99.17 | 99.25 | 99.30 | 99.33 | 99.36 | 99.37 | 99.39 | 99.40 |
| 3 | 34.12 | 30.82 | 29.46 | 28.71 | 28.24 | 27.91 | 27.67 | 27.19 | 27.35 | 27.23 |
| 4 | 21.20 | 18.00 | 16.69 | 15.98 | 15.52 | 15.21 | 11.98 | 14.80 | 11.66 | 14.55 |
| 5 | 16.26 | 13.27 | 12.06 | 11.39 | 10.97 | 10.67 | 10.46 | 10.29 | 10.16 | 10.05 |
| 6 | 13.75 | 10.92 | 9.78 | 9.15 | 8.75 | 8.17 | 8.26 | 8.10 | 7.98 | 7.87 |
| 7 | 12.25 | 9.55 | 8.45 | 7.85 | 7.46 | 7.19 | 6.99 | 6.84 | 6.72 | 6.62 |
| 8 | 11.26 | 8.65 | 7.59 | 7.01 | 6.63 | 6.37 | 6.18 | 6.03 | 5.91 | 5.81 |
| 9 | 10.56 | 8.02 | 6.99 | 6.42 | 6.06 | 5.80 | 5.61 | 5.47 | 5.35 | 5.26 |
| 10 | 10.04 | 7.56 | 6.55 | 5.99 | 5.64 | 5.39 | 5.20 | 5.06 | 4.94 | 4.85 |
| 11 | 9.65 | 7.21 | 6.22 | 5.67 | 5.32 | 5.07 | 4.89 | 4.74 | 4.63 | 4.54 |
| 12 | 9.33 | 6.93 | 5.95 | 5.41 | 5.06 | 4.82 | 4.64 | 4.50 | 4.39 | 4.30 |
| 13 | 9.07 | 6.70 | 5.71 | 5.21 | 1.86 | 4.62 | 4.41 | 4.30 | 4.19 | 4.10 |
| 14 | 8.86 | 6.51 | 5.56 | 5.04 | 4 69 | 1.46 | 4.28 | 4.11 | 4.03 | 3.91 |
| 15 | 8.68 | 6.36 | 5.12 | 4.89 | 1.56 | 4.32 | 4.14 | 4.00 | 3.89 | 3.80 |
| 16 | 8.53 | 6.23 | 5.29 | 4.77 | 1.44 | 4.20 | 4.03 | 3.89 | 3.78 | 3.69 |
| 17 | 8.40 | 6.11 | 5.18 | 1.67 | 4.34 | 1.10 | 3.93 | 3.79 | 3.68 | 3.59 |
| 18 | 8.29 | 6.01 | 5.09 | 4.58 | 4.25 | 4.01 | 3.84 | 3.71 | 3.60 | 3.51 |
| 19 | 8.18 | 5.93 | 5.01 | 1.50 | 1.17 | 3.94 | 3.77 | 3.63 | 3.52 | 3.43 |
| 20 | 8.10 | 5.85 | 4.94 | 1.43 | 1.10 | 3.87 | 3.70 | 3.56 | 3.46 | 3.37 |
| 21 | 8.02 | 5.78 | 4.87 | 1.37 | 4.04 | 3.81 | 3.64 | 3.51 | 3.40 | 3.31 |
| 22 | 7.95 | 5.72 | 4.82 | 4.31 | 3.99 | 3.76 | 3.59 | 3.45 | 3.35 | 3.26 |
| 23 | 7.88 | 5.66 | 4.76 | 1.26 | 3.94 | 3.71 | 3.54 | 3.41 | 3.30 | 3.21 |
| 24 | 7.82 | 5.61 | 1.72 | 4.22 | 3.90 | 3.67 | 3.50 | 3.36 | 3.26 | 3.17 |
| 25 | 7.77 | 5.57 | 4.68 | 4.18 | 3.85 | 3.63 | 3.46 | 3.32 | 3.22 | 3.13 |
| 26 | 7.72 | 5.53 | 4.64 | 1.14 | 3.82 | 3.59 | 3.42 | 3.29 | 3.18 | 3.09 |
| 27 | 7.68 | 5.49 | 4.60 | 4.11 | 3.78 | 3.56 | 3.39 | 3.26 | 3.15 | 3.06 |
| 28 | 7.64 | 5.15 | 4.57 | 4.07 | 3.75 | 3.53 | 3.36 | 3.23 | 3.12 | 3.03 |
| 29 | 7.60 | 5.12 | 1.54 | 4.04 | 3.73 | 3.50 | 3.33 | 3.20 | 3.09 | 3.00 |
| 30 | 7.56 | 5.39 | 4.51 | 4.02 | 3.70 | 3.47 | 3.30 | 3.17 | 3.07 | 2.98 |
| 40 | 7.31 | 5.18 | 1.31 | 3.83 | 3.51 | 3.29 | 3.12 | 2.99 | 2.89 | 2.80 |
| 60 | 7.08 | 4.98 | 1.13 | 3.65 | 3.34 | 3.12 | 2.95 | 2.82 | 2.72 | 2.63 |
| 120 | 6.85 | 4.79 | 1.95 | 3.18 | 3.17 | 2.96 | 2.79 | 2.66 | 2.56 | 2.47 |
| $\infty$ | 6.63 | 4.61 | 3.78 | 3.32 | 3.02 | 2.80 | 2.61 | 2.51 | 2.41 | 2.32 |

Tabella 5b - (segue Tabella 5a)

| $\nu_1 \rightarrow$ $\nu_2 \downarrow$ | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6106 | 6157 | 6209 | 6235 | 6261 | 6287 | 6313 | 6339 | 6366 |
| 2 | 99.42 | 99.43 | 99.45 | 99.46 | 99.47 | 99.47 | 99.48 | 99.49 | 99.50 |
| 3 | 27.05 | 26.87 | 26.69 | 26.60 | 26.50 | 26.41 | 26.32 | 26.22 | 26.13 |
| 4 | 14.37 | 14.20 | 14.02 | 13.93 | 13.84 | 13.75 | 13.65 | 13.56 | 13.46 |
| 5 | 9.89 | 9.72 | 9.55 | 9.47 | 9.38 | 9.29 | 9.20 | 9.11 | 9.02 |
| 6 | 7.72 | 7.56 | 7.40 | 7.31 | 7.23 | 7.14 | 7.06 | 6.97 | 6.88 |
| 7 | 6.47 | 6.31 | 6.16 | 6.07 | 5.99 | 5.91 | 5.82 | 5.74 | 5.65 |
| 8 | 5.67 | 5.52 | 5.36 | 5.28 | 5.20 | 5.12 | 5.03 | 4.95 | 4.86 |
| 9 | 5.11 | 4.96 | 4.81 | 4.73 | 4.65 | 4.57 | 4.48 | 4.40 | 4.31 |
| 10 | 4.71 | 4.56 | 4.41 | 4.33 | 4.25 | 4.17 | 4.08 | 4.00 | 3.91 |
| 11 | 4.40 | 4.25 | 4.10 | 4.02 | 3.94 | 3.86 | 3.78 | 3.69 | 3.60 |
| 12 | 4.16 | 4.01 | 3.86 | 3.78 | 3.70 | 3.62 | 3.54 | 3.45 | 3.36 |
| 13 | 3.96 | 3.82 | 3.66 | 3.59 | 3.51 | 3.43 | 3.34 | 3.25 | 3.17 |
| 14 | 3.80 | 3.66 | 3.51 | 3.43 | 3.35 | 3.27 | 3.18 | 3.09 | 3.00 |
| 15 | 3.67 | 3.52 | 3.37 | 3.29 | 3.21 | 3.13 | 3.05 | 2.96 | 2.87 |
| 16 | 3.55 | 3.41 | 3.26 | 3.18 | 3.10 | 3.02 | 2.93 | 2.84 | 2.75 |
| 17 | 3.46 | 3.31 | 3.16 | 3.08 | 3.00 | 2.92 | 2.83 | 2.75 | 2.65 |
| 18 | 3.37 | 3.23 | 3.08 | 3.00 | 2.92 | 2.84 | 2.75 | 2.66 | 2.57 |
| 19 | 3.30 | 3.15 | 3.00 | 2.92 | 2.84 | 2.76 | 2.67 | 2.58 | 2.49 |
| 20 | 3.23 | 3.09 | 2.94 | 2.86 | 2.78 | 2.69 | 2.61 | 2.52 | 2.42 |
| 21 | 3.17 | 3.03 | 2.88 | 2.80 | 2.72 | 2.64 | 2.55 | 2.46 | 2.36 |
| 22 | 3.12 | 2.98 | 2.83 | 2.75 | 2.67 | 2.58 | 2.50 | 2.40 | 2.31 |
| 23 | 3.07 | 2.93 | 2.78 | 2.70 | 2.62 | 2.54 | 2.45 | 2.35 | 2.26 |
| 24 | 3.03 | 2.89 | 2.74 | 2.66 | 2.58 | 2.49 | 2.40 | 2.31 | 2.21 |
| 25 | 2.99 | 2.85 | 2.70 | 2.62 | 2.54 | 2.45 | 2.36 | 2.27 | 2.17 |
| 26 | 2.96 | 2.81 | 2.66 | 2.58 | 2.50 | 2.42 | 2.33 | 2.23 | 2.13 |
| 27 | 2.93 | 2.78 | 2.63 | 2.55 | 2.47 | 2.38 | 2.29 | 2.20 | 2.10 |
| 28 | 2.90 | 2.75 | 2.60 | 2.52 | 2.44 | 2.35 | 2.26 | 2.17 | 2.06 |
| 29 | 2.87 | 2.73 | 2.57 | 2.49 | 2.41 | 2.33 | 2.23 | 2.14 | 2.03 |
| 30 | 2.84 | 2.70 | 2.55 | 2.47 | 2.39 | 2.30 | 2.21 | 2.11 | 2.01 |
| 40 | 2.66 | 2.52 | 2.37 | 2.29 | 2.20 | 2.11 | 2.02 | 1.92 | 1.80 |
| 60 | 2.50 | 2.35 | 2.20 | 2.12 | 2.03 | 1.94 | 1.84 | 1.73 | 1.60 |
| 120 | 2.34 | 2.19 | 2.03 | 1.95 | 1.86 | 1.76 | 1.66 | 1.53 | 1.38 |
| $\infty$ | 2.18 | 2.04 | 1.88 | 1.79 | 1.70 | 1.59 | 1.47 | 1.32 | 1.00 |

Tabella 6a - Distribuzione della $F$ di Fischer per $\alpha = 2.5\%$, $\nu_1$ = gradi di libertà del numeratore, $\nu_2$ = gradi di libertà del denominatore.

| $\nu_1 \rightarrow$ / $\nu_2 \downarrow$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 647.8 | 799.5 | 864.2 | 899.6 | 921.8 | 937.1 | 948.2 | 956.7 | 963.3 | 968.6 |
| 2 | 38.51 | 39.00 | 39 17 | 39.25 | 39.30 | 39.33 | 39.36 | 39.37 | 39.39 | 39.40 |
| 3 | 17.44 | 16.04 | 15.44 | 15.10 | 14.88 | 14.73 | 14.62 | 14.54 | 14.47 | 14.42 |
| 4 | 12.22 | 10.65 | 9.98 | 9.60 | 9.36 | 9.20 | 9.07 | 8.98 | 8.90 | 8.84 |
| 5 | 10.01 | 8.43 | 7.76 | 7.39 | 7.15 | 6.98 | 6.85 | 6.76 | 6.68 | 6.62 |
| 6 | 8.81 | 7.26 | 6.60 | 6.23 | 5.99 | 5.82 | 5.70 | 5.60 | 5.52 | 5.46 |
| 7 | 8.01 | 6.54 | 5.89 | 5.52 | 5.29 | 5.12 | 4.99 | 4.90 | 4.82 | 4.76 |
| 8 | 7.57 | 6.06 | 5.42 | 5.05 | 4.82 | 4.65 | 4.53 | 4.43 | 4.36 | 4.30 |
| 9 | 7.21 | 5.71 | 5.08 | 4.72 | 4.48 | 4.32 | 4.20 | 4.10 | 4.03 | 3.96 |
| 10 | 6.94 | 5.46 | 4.83 | 4.47 | 4.24 | 4.07 | 3.95 | 3.85 | 3.78 | 3.72 |
| 11 | 6.72 | 5.26 | 4.63 | 4.28 | 4.04 | 3.88 | 3.76 | 3.66 | 3.59 | 3.53 |
| 12 | 6.55 | 5.10 | 4.47 | 4.12 | 3.89 | 3.73 | 3.61 | 3.51 | 3.44 | 3.37 |
| 13 | 6.41 | 4.97 | 4.35 | 4.00 | 3.77 | 3.60 | 3.48 | 3.39 | 3.31 | 3.25 |
| 14 | 6.30 | 4.86 | 4.24 | 3.89 | 3.66 | 3.50 | 3.38 | 3.29 | 3.21 | 3.15 |
| 15 | 6.20 | 4.77 | 4.15 | 3.80 | 3.58 | 3.41 | 3.29 | 3.20 | 3.12 | 3.06 |
| 16 | 6.12 | 4.69 | 4.08 | 3.73 | 3.50 | 3.34 | 3.22 | 3.12 | 3.05 | 2.99 |
| 17 | 6.04 | 4.62 | 4.01 | 3.66 | 3.44 | 3.28 | 3.16 | 3.06 | 2.98 | 2.92 |
| 18 | 5.98 | 4.56 | 3.95 | 3.61 | 3.38 | 3.22 | 3.10 | 3.01 | 2.93 | 2.87 |
| 19 | 5.92 | 4.51 | 3.90 | 3.56 | 3.33 | 3.17 | 3.05 | 2.96 | 2.88 | 2.82 |
| 20 | 5.87 | 4.46 | 3.86 | 3.51 | 3.29 | 3.13 | 3.01 | 2.91 | 2.84 | 2.77 |
| 21 | 5.83 | 4.42 | 3.82 | 3.48 | 3.25 | 3.09 | 2.97 | 2.87 | 2.80 | 2.13 |
| 22 | 5.79 | 4.38 | 3.78 | 3.44 | 3.22 | 3.05 | 2.93 | 2.84 | 2.76 | 2.70 |
| 23 | 5.75 | 4.35 | 3.75 | 3.41 | 3.18 | 3.02 | 2.90 | 2.81 | 2.13 | 2.67 |
| 24 | 5.72 | 4.32 | 3.72 | 3.38 | 3.15 | 2.99 | 2.87 | 2.18 | 2.70 | 2.64 |
| 25 | 5.69 | 4.29 | 3.69 | 3.35 | 3.13 | 2.97 | 2.85 | 2.75 | 2.68 | 2.61 |
| 26 | 5.66 | 4.27 | 3.67 | 3.33 | 3.10 | 2.94 | 2.82 | 2.73 | 2.65 | 2.59 |
| 27 | 5.63 | 4.24 | 3.65 | 3.31 | 3.08 | 2.92 | 2.80 | 2.71 | 2.63 | 2.57 |
| 28 | 5.61 | 4.22 | 3.63 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.18 | 2.69 | 2.61 | 2.55 |
| 29 | 5.59 | 4.20 | 3.61 | 3.27 | 3.04 | 2.88 | 2.76 | 2.67 | 2.59 | 2.53 |
| 30 | 5.67 | 4.18 | 3.59 | 3.25 | 3.03 | 2.87 | 2.75 | 2.65 | 2.57 | 2.51 |
| 40 | 5.42 | 4.05 | 3.46 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.62 | 2.53 | 2.45 | 2.39 |
| 60 | 5.29 | 3.93 | 3.34 | 3.01 | 2.79 | 2.63 | 2.51 | 2.41 | 2.33 | 2.27 |
| 120 | 5.15 | 3.80 | 3.23 | 2.89 | 2.67 | 2.52 | 2.39 | 2.30 | 2.22 | 2.16 |
| $\infty$ | 5.02 | 3.69 | 3.12 | 2.79 | 2.57 | 2.41 | 2.29 | 2.19 | 2.11 | 2.05 |

Tabella 6b - (segue Tabella 6a)

| $\nu_1 \rightarrow$ / $\nu_2 \downarrow$ | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 976.7 | 984.9 | 993.1 | 997.2 | 1001 | 1006 | 1010 | 1014 | 1018 |
| 2 | 39.41 | 39.43 | 39.45 | 39.46 | 39.46 | 39.47 | 39.48 | 39.49 | 39.50 |
| 3 | 14.34 | 14.25 | 14.17 | 14.12 | 14 08 | 14.04 | 13.99 | 13.95 | 13.90 |
| 4 | 8.75 | 8.66 | 8.56 | 8.51 | 8.46 | 8.41 | 8.36 | 8.31 | 8.26 |
| 5 | 6.52 | 6.43 | 6.33 | 6.28 | 6.23 | 6.18 | 6.12 | 6.07 | 6.02 |
| 6 | 5.37 | 5.27 | 5.17 | 5.12 | 5.07 | 5.01 | 4.96 | 4.90 | 4.85 |
| 7 | 4.67 | 4.57 | 4.47 | 4.42 | 4.36 | 4.31 | 4.25 | 4.20 | 4.14 |
| 8 | 4.20 | 4.10 | 4.00 | 3.95 | 3.89 | 3.84 | 3.78 | 3.73 | 3.67 |
| 9 | 3.87 | 3.77 | 3.67 | 3.61 | 3.56 | 3.51 | 3.45 | 3.39 | 3.33 |
| 10 | 3.62 | 3.52 | 3.42 | 3.37 | 3.31 | 3.26 | 3.20 | 3.14 | 3.08 |
| 11 | 3.43 | 3.33 | 3.23 | 3.17 | 3.12 | 3.06 | 3.00 | 2.94 | 2.88 |
| 12 | 3.28 | 3.18 | 3.07 | 3.02 | 2.96 | 2.91 | 2.85 | 2.79 | 2.72 |
| 13 | 3.15 | 3.05 | 2.95 | 2.89 | 2.84 | 2.78 | 2.72 | 2.66 | 2.60 |
| 14 | 3.05 | 2.95 | 2.84 | 2.79 | 2.73 | 2.67 | 2.61 | 2.55 | 2.49 |
| 15 | 2.96 | 2.86 | 2.76 | 2.70 | 2.64 | 2.59 | 2.52 | 2.46 | 2.40 |
| 16 | 2.89 | 2.79 | 2.68 | 2.63 | 2.57 | 2.51 | 2.45 | 2.38 | 2.32 |
| 17 | 2.82 | 2.72 | 2.62 | 2.56 | 2.50 | 2.44 | 2.38 | 2.32 | 2.25 |
| 18 | 2.77 | 2.67 | 2.56 | 2.50 | 2.44 | 2.38 | 2.32 | 2.26 | 2.19 |
| 19 | 2.72 | 2.62 | 2.51 | 2.45 | 2.39 | 2.33 | 2.27 | 2.20 | 2.13 |
| 20 | 2.68 | 2.57 | 2.46 | 2.41 | 2.35 | 2.29 | 2.22 | 2.16 | 2.09 |
| 21 | 2.64 | 2.53 | 2.42 | 2.37 | 2.31 | 2.25 | 2.18 | 2.11 | 2.04 |
| 22 | 2.60 | 2.50 | 2.39 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.14 | 2.08 | 2.00 |
| 23 | 2.57 | 2.47 | 2.36 | 2.30 | 2.24 | 2.18 | 2.11 | 2.04 | 1.97 |
| 24 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.15 | 2.08 | 2.01 | 1.94 |
| 25 | 2.51 | 2.41 | 2.30 | 2.24 | 2.18 | 2.12 | 2.05 | 1.98 | 1.91 |
| 26 | 2.49 | 2.39 | 2.28 | 2.22 | 2.16 | 2.09 | 2.03 | 1.95 | 1.88 |
| 27 | 2.47 | 2.36 | 2.25 | 2.19 | 2.13 | 2.07 | 2.00 | 1.93 | 1.85 |
| 28 | 2.45 | 2.34 | 2.23 | 2.17 | 2.11 | 2.05 | 1.98 | 1.91 | 1.83 |
| 29 | 2.43 | 2.32 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 30 | 2.41 | 2.31 | 2.20 | 2.14 | 2.07 | 2.01 | 1.94 | 1.87 | 1.79 |
| 40 | 2.29 | 2.18 | 2.07 | 2.01 | 1.94 | 1.88 | 1.80 | 1.72 | 1.64 |
| 60 | 2.17 | 2.06 | 1.94 | 1.88 | 1.82 | 1.74 | 1.67 | 1.58 | 1.48 |
| 120 | 2.05 | 1.94 | 1.82 | 1.76 | 1.69 | 1.61 | 1.53 | 1.43 | 1.31 |
| $\infty$ | 1.94 | 1.83 | 1.71 | 1.64 | 1.57 | 1.48 | 1.39 | 1.27 | 1.00 |

Tabella 7a - Distribuzione della $F$ di Fischer per $\alpha = 5\%$, $\nu_1$ = gradi di libertà del numeratore, $\nu_2$ = gradi di libertà del denominatore.

| $\nu_1 \rightarrow$ $\nu_2 \downarrow$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 161.4 | 199.5 | 215.7 | 224.6 | 230.2 | 234.0 | 236.8 | 238.9 | 240.5 |
| 2 | 18.51 | 19.00 | 19.16 | 19.25 | 19.30 | 19.33 | 19.35 | 19.37 | 19.38 |
| 3 | 10.13 | 9.55 | 9.28 | 9.12 | 9.01 | 8.94 | 8.89 | 8.85 | 8.81 |
| 4 | 7.71 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 6.00 |
| 5 | 6.61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.77 |
| 6 | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.10 |
| 7 | 5.59 | 4.74 | 4.35 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.68 |
| 8 | 5.32 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.58 | 3.50 | 3.44 | 3.39 |
| 9 | 5.12 | 4.26 | 3.86 | 3.63 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.23 | 3.18 |
| 10 | 4.96 | 4.10 | 3.71 | 3.48 | 3.33 | 3.22 | 3.14 | 3.07 | 3.02 |
| 11 | 4.84 | 3.98 | 3.59 | 3.35 | 3.20 | 3.09 | 3.01 | 2.95 | 2.90 |
| 12 | 4.75 | 3 89 | 3.49 | 3.26 | 3.11 | 3.00 | 2.91 | 2.85 | 2.80 |
| 13 | 4.67 | 3.81 | 3.41 | 3.18 | 3.03 | 2.92 | 2.83 | 2.77 | 2.71 |
| 14 | 4.60 | 3.74 | 3.34 | 3.11 | 2.96 | 2.85 | 2.76 | 2.70 | 2.65 |
| 15 | 4.54 | 3.58 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.79 | 2.71 | 2.64 | 2.59 |
| 16 | 4.49 | 3.63 | 3.24 | 3.01 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.59 | 2.54 |
| 17 | 4.45 | 3.59 | 3.20 | 2.96 | 2.81 | 2.70 | 2.61 | 2.55 | 2.49 |
| 18 | 4.41 | 3.55 | 3.16 | 2.93 | 2.77 | 2.66 | 2.58 | 2.51 | 2.46 |
| 19 | 4.38 | 3.52 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 1.63 | 2.54 | 2.48 | 2.42 |
| 20 | 4.35 | 3.49 | 3.10 | 2.87 | 2.71 | 2.60 | 2.51 | 2.45 | 2.39 |
| 21 | 4.32 | 3.47 | 3.07 | 2.84 | 2.68 | 2.57 | 2.49 | 2.42 | 2.37 |
| 22 | 4.30 | 3.44 | 3.05 | 2.82 | 2.66 | 2.55 | 2.46 | 2.40 | 2.34 |
| 23 | 4.28 | 3.42 | 3.03 | 2.80 | 2.64 | 2.53 | 2.44 | 2.37 | 2.32 |
| 24 | 4.26 | 3.40 | 3.01 | 2.78 | 2.62 | 2.51 | 2.42 | 2.36 | 2.30 |
| 25 | 4.24 | 3.39 | 2.99 | 2.76 | 2.60 | 2.49 | 2.40 | 2.34 | 2.28 |
| 25 | 4.23 | 3.37 | 2.98 | 2.74 | 2.59 | 2.47 | 2.39 | 2.32 | 2.27 |
| 27 | 4.21 | 3.35 | 2.96 | 2.73 | 2.57 | 2.46 | 2.37 | 2.31 | 2.25 |
| 28 | 4.20 | 3.34 | 2.95 | 2.71 | 2.56 | 2.45 | 2.36 | 2.29 | 2.24 |
| 29 | 4.18 | 3.33 | 2.93 | 2.70 | 2.55 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.22 |
| 30 | 4.17 | 3.32 | 2.92 | 2.59 | 2.53 | 2.42 | 2.33 | 2.27 | 2.21 |
| 40 | 4.08 | 3.23 | 2.84 | 2.61 | 2.45 | 2.34 | 2.25 | 2.18 | 2.12 |
| 60 | 4.00 | 3.15 | 2.76 | 2.53 | 2.37 | 2.25 | 2.17 | 2.10 | 2.04 |
| 120 | 3.92 | 3.07 | 2.68 | 2.45 | 2.29 | 2.17 | 2.09 | 2.02 | 1.96 |
| $\infty$ | 3.84 | 3.00 | 2.60 | 2.37 | 2.21 | 2.10 | 2.01 | 1.94 | 1.88 |

Tabella 7b - (segue Tabella 7a)

| $\nu_1 \rightarrow$ / $\nu_2 \downarrow$ | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 241.9 | 243.9 | 245.9 | 248.0 | 249.1 | 250.1 | 251.1 | 252.2 | 253.3 | 254.3 |
| 2 | 19.40 | 19.41 | 19.43 | 19.45 | 19.45 | 19.46 | 19.41 | 19.48 | 19.49 | 19.50 |
| 3 | 8.19 | 8.74 | 8.10 | 8.66 | 8.64 | 8.62 | 8.59 | 8.57 | 8.55 | 8.53 |
| 4 | 5.96 | 5.91 | 5.86 | 5.80 | 5.11 | 5.15 | 5.12 | 5.69 | 5.66 | 5.63 |
| 5 | 4.74 | 4.68 | 4.62 | 4.56 | 4.53 | 4.50 | 4.46 | 4.43 | 4.40 | 4.36 |
| 6 | 4.06 | 4.00 | 3.94 | 3.87 | 3.84 | 3.81 | 3.71 | 3.74 | 3.70 | 3.67 |
| 7 | 3.64 | 3.57 | 3.51 | 3.44 | 3.41 | 3.38 | 3.34 | 3.30 | 3.27 | 3.23 |
| 8 | 3.35 | 3.28 | 3.22 | 3.15 | 3.12 | 3.08 | 3.04 | 3.01 | 2.97 | 2.93 |
| 9 | 3.14 | 3.07 | 3.01 | 2.94 | 2.90 | 2.86 | 2.83 | 2.79 | 2.75 | 2.71 |
| 10 | 2.98 | 2.91 | 2.85 | 2.77 | 2.74 | 2.10 | 2.66 | 2.62 | 2.58 | 2.54 |
| 11 | 2.85 | 2.79 | 2.72 | 2.65 | 2.61 | 2.51 | 2.53 | 2.49 | 2.45 | 2.40 |
| 12 | 2.75 | 2.69 | 2.62 | 2.54 | 2.51 | 2.47 | 2.43 | 2.38 | 2.34 | 2.30 |
| 13 | 2.67 | 2.60 | 2.53 | 2.46 | 2.42 | 2.38 | 2.34 | 2.30 | 2.25 | 2.21 |
| 14 | 2.60 | 2.53 | 2.46 | 2.39 | 2.35 | 2.31 | 2.27 | 2.22 | 2.18 | 2.13 |
| 15 | 2.54 | 2.48 | 2.40 | 2.33 | 2.29 | 2.25 | 2.20 | 2.16 | 2.11 | 2.07 |
| 16 | 2.49 | 2.42 | 2.35 | 2.28 | 2.24 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 2.06 | 2.01 |
| 17 | 2.45 | 2.38 | 2.31 | 2.23 | 2.19 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.01 | 1.96 |
| 18 | 2.41 | 2.34 | 2.27 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 2.06 | 2.02 | 1.97 | 1.92 |
| 19 | 2.38 | 2.31 | 2.23 | 2.16 | 2.11 | 2.01 | 2.03 | 1.98 | 1.93 | 1.88 |
| 20 | 2.35 | 2.28 | 2.20 | 2.12 | 2.08 | 2.04 | 1.99 | 1.95 | 1.90 | 1.84 |
| 21 | 2.32 | 2.25 | 2.18 | 2.10 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.87 | 1.81 |
| 22 | 2.30 | 2.23 | 2.15 | 2.07 | 2.03 | 1.98 | 1.94 | 1.89 | 1.84 | 1.78 |
| 23 | 2.27 | 2.20 | 2.13 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.91 | 1.86 | 1.81 | 1.16 |
| 24 | 2.25 | 2.18 | 2.11 | 2.03 | 1.98 | 1.94 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.13 |
| 25 | 2.24 | 2.16 | 2.09 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.81 | 1.82 | 1.77 | 1.11 |
| 26 | 2.22 | 2.15 | 2.07 | 1.99 | 1.95 | 1.90 | 1.85 | 1.80 | 1.75 | 1.69 |
| 27 | 2.20 | 2.13 | 2.06 | 1.91 | 1.93 | 1.88 | 1.84 | 1.79 | 1.73 | 1.61 |
| 28 | 2.19 | 2.12 | 2.04 | 1.96 | 1.91 | 1.81 | 1.82 | 1.77 | 1.71 | 1.65 |
| 29 | 2.18 | 2.10 | 2.03 | 1.94 | 1.90 | 1.85 | 1.81 | 1.75 | 1.70 | 1.64 |
| 30 | 2.16 | 2.09 | 2.01 | 1.93 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.68 | 1.62 |
| 40 | 2.08 | 2.00 | 1.92 | 1.84 | 1.19 | 1.74 | 1.69 | 1.64 | 1.58 | 1.51 |
| 60 | 1.99 | 1.92 | 1.84 | 1.75 | 1.10 | 1.65 | 1.59 | 1.53 | 1.47 | 1.39 |
| 120 | 1.91 | 1.83 | 1.75 | 1.66 | 1.61 | 1.55 | 1.50 | 1.43 | 1.35 | 1.25 |
| $\infty$ | 1.83 | 1.75 | 1.67 | 1.57 | 1.52 | 1.46 | 1.39 | 1.32 | 1.22 | 1.00 |

Tabella 8a - Distribuzione della $F$ di Fischer per $\alpha = 10\%$, $\nu_1$ = gradi di libertà del numeratore, $\nu_2$ = gradi di libertà del denominatore.

| $\nu_1 \rightarrow$ $\nu_2 \downarrow$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 39.86 | 49.50 | 53.59 | 55.83 | 57.24 | 58.20 | 58.91 | 59.44 | 59.86 |
| 2 | 8.53 | 9.00 | 9.16 | 9.24 | 9.29 | 9.33 | 9.35 | 9.37 | 9.38 |
| 3 | 5.54 | 5.46 | 5.39 | 5.34 | 5.31 | 5.28 | 5.27 | 5.25 | 5.24 |
| 4 | 4.54 | 4.32 | 4.19 | 4.11 | 4.05 | 4.01 | 3.98 | 3.95 | 3.94 |
| 5 | 4.06 | 3.78 | 3.62 | 3.52 | 3.45 | 3.40 | 3.37 | 3.34 | 3.32 |
| 6 | 3.78 | 3.46 | 3.29 | 3.18 | 3.11 | 3.05 | 3.01 | 2.98 | 2.96 |
| 7 | 3.59 | 3.26 | 3.07 | 2.96 | 2.88 | 2.83 | 2.78 | 2.75 | 2.72 |
| 8 | 3.46 | 3.11 | 2.92 | 2.81 | 2.73 | 2.67 | 2.62 | 2.59 | 2.56 |
| 9 | 3.36 | 3.01 | 2.81 | 2.69 | 2.61 | 2.55 | 2.51 | 2.47 | 2.44 |
| 10 | 3.29 | 2.92 | 2.73 | 2.61 | 2.52 | 2.46 | 2.41 | 2.38 | 2.35 |
| 11 | 3.23 | 2.86 | 2.66 | 2.54 | 2.45 | 2.39 | 2.34 | 2.30 | 2.27 |
| 12 | 3.18 | 2.81 | 2.61 | 2.48 | 2.39 | 2.33 | 2.28 | 2.24 | 2.21 |
| 13 | 3.14 | 2.76 | 2.56 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.23 | 2.20 | 2.16 |
| 14 | 3.10 | 2.73 | 2.52 | 2.39 | 2.31 | 2.24 | 2.19 | 2.15 | 2.12 |
| 15 | 3.07 | 2.70 | 2.49 | 2.36 | 2.27 | 2.21 | 2.16 | 2.12 | 2.09 |
| 16 | 3.05 | 2.67 | 2.46 | 2.33 | 2.24 | 2.18 | 2.14 | 2.09 | 2.06 |
| 17 | 3.03 | 2.64 | 2.44 | 2.31 | 2.22 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.03 |
| 18 | 3.01 | 2.62 | 2.42 | 2.29 | 2.20 | 2.13 | 2.08 | 2.04 | 2.00 |
| 19 | 2.99 | 2.61 | 2.40 | 2.27 | 2.18 | 2.11 | 2.06 | 2.02 | 1.98 |
| 20 | 2.97 | 2.59 | 2.38 | 2.25 | 2.16 | 2.09 | 2.04 | 2.00 | 1.96 |
| 21 | 2.96 | 2.57 | 2.36 | 2.23 | 2.14 | 2.08 | 2.02 | 1.98 | 1.95 |
| 22 | 2.95 | 2.56 | 2.35 | 2.22 | 2.13 | 2.06 | 2.01 | 1.97 | 1.93 |
| 23 | 2.94 | 2.55 | 2.34 | 2.21 | 2.11 | 2.05 | 1.99 | 1.95 | 1.92 |
| 24 | 2.93 | 2.54 | 2.33 | 2.19 | 2.10 | 2.04 | 1.98 | 1.94 | 1.91 |
| 25 | 2.92 | 2.53 | 2.32 | 2.18 | 2.09 | 2.02 | 1.97 | 1.93 | 1.89 |
| 26 | 2.91 | 2.52 | 2.31 | 2.17 | 2.08 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.88 |
| 27 | 2.90 | 2.51 | 2.30 | 2.17 | 2.07 | 2.00 | 1.95 | 1.91 | 1.87 |
| 28 | 2.89 | 2.50 | 2.29 | 2.16 | 2.06 | 2.00 | 1.94 | 1.90 | 1.87 |
| 29 | 2.89 | 2.50 | 2.28 | 2.15 | 2.06 | 1.99 | 1.93 | 1.89 | 1.86 |
| 30 | 2.88 | 2.49 | 2.28 | 2.14 | 2.05 | 1.98 | 1.93 | 1.88 | 1.85 |
| 40 | 2.84 | 2.44 | 2.23 | 2.09 | 2.00 | 1.93 | 1.87 | 1.83 | 1.79 |
| 60 | 2.79 | 2.39 | 2.18 | 2.04 | 1.95 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.74 |
| 120 | 2.75 | 2.35 | 2.13 | 1.99 | 1.90 | 1.82 | 1.77 | 1.71 | 1.68 |
| $\infty$ | 2.71 | 2.30 | 2.08 | 1.94 | 1.85 | 1.77 | 1.72 | 1.61 | 1.63 |

Tabella 8b - (segue Tabella 8a)

| $\nu_1 \rightarrow$ / $\nu_2 \downarrow$ | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 60.19 | 60.71 | 61.22 | 61.74 | 62.00 | 62.26 | 62.53 | 62.79 | 63.06 | 63.33 |
| 2 | 9.39 | 9.41 | 9.42 | 9.44 | 9.45 | 9.46 | 9.41 | 9.41 | 9.48 | 9.49 |
| 3 | 5.23 | 5.22 | 5.20 | 5.18 | 5.18 | 5.17 | 5.16 | 5.15 | 5.14 | 5.13 |
| 4 | 3.92 | 3.90 | 3.87 | 3.84 | 3.83 | 3.82 | 3.80 | 3.79 | 3.78 | 3.76 |
| 5 | 3.30 | 3.27 | 3.24 | 3.21 | 3.19 | 3.17 | 3.16 | 3.14 | 3.12 | 3.10 |
| 6 | 2.94 | 2.90 | 2.87 | 2.84 | 2.82 | 2.80 | 2.78 | 2.16 | 2.74 | 2.72 |
| 7 | 2.70 | 2.67 | 2.63 | 2.59 | 2.58 | 2.56 | 2.54 | 2.51 | 2.49 | 2.41 |
| 8 | 2.54 | 2.50 | 2.46 | 2.42 | 2.40 | 2.38 | 2.36 | 2.34 | 2.32 | 2.29 |
| 9 | 2.42 | 2.38 | 2.34 | 2.30 | 2.28 | 2.25 | 2.23 | 2.21 | 2.18 | 2.16 |
| 10 | 2.32 | 2.28 | 2.24 | 2.20 | 2.18 | 2.16 | 2.13 | 2.11 | 2.08 | 2.06 |
| 11 | 2.25 | 2.21 | 2.17 | 2.12 | 2.10 | 2.08 | 2.05 | 2.03 | 2.00 | 1.91 |
| 12 | 2.19 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.04 | 2.01 | 1.99 | 1.96 | 1.93 | 1.90 |
| 13 | 2.14 | 2.10 | 2.05 | 2.01 | 1.98 | 1.96 | 1.93 | 1.90 | 1.88 | 1.85 |
| 14 | 2.10 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.94 | 1.91 | 1.89 | 1.86 | 1.83 | 1.80 |
| 15 | 2.06 | 2.02 | 1.97 | 1.92 | 1.90 | 1.87 | 1.85 | 1.82 | 1.79 | 1.76 |
| 16 | 2.03 | 1.99 | 1.94 | 1.89 | 1.87 | 1.84 | 1.81 | 1.78 | 1.75 | 1.12 |
| 17 | 2.00 | 1.96 | 1.91 | 1.86 | 1.84 | 1.81 | 1.78 | 1.75 | 1.72 | 1.69 |
| 18 | 1.98 | 1.93 | 1.89 | 1.84 | 1.81 | 1.78 | 1.15 | 1.72 | 1.69 | 1.66 |
| 19 | 1.96 | 1.91 | 1.86 | 1.81 | 1.79 | 1.76 | 1.73 | 1.70 | 1.67 | 1.63 |
| 20 | 1.94 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.71 | 1.74 | 1.71 | 1.68 | 1.64 | 1.61 |
| 21 | 1.92 | 1.87 | 1.83 | 1.78 | 1.75 | 1.72 | 1.69 | 1.66 | 1.62 | 1.59 |
| 22 | 1.90 | 1.86 | 1.81 | 1.76 | 1.73 | 1.10 | 1.61 | 1.64 | 1.60 | 1.51 |
| 23 | 1.89 | 1.84 | 1.80 | 1.74 | 1.72 | 1.69 | 1.66 | 1.62 | 1.59 | 1.55 |
| 24 | 1.88 | 1.83 | 1.72 | 1.73 | 1.70 | 1.61 | 1.64 | 1.61 | 1.51 | 1.53 |
| 25 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.72 | 1.69 | 1.66 | 1.63 | 1.59 | 1.56 | 1.52 |
| 26 | 1.86 | 1.81 | 1.76 | 1.71 | 1.68 | 1.65 | 1.61 | 1.58 | 1.54 | 1.50 |
| 27 | 1.85 | 1.80 | 1.75 | 1.70 | 1.61 | 1.64 | 1.60 | 1.51 | 1.53 | 1.49 |
| 28 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.69 | 1.66 | 1.63 | 1.59 | 1.56 | 1.52 | 1.48 |
| 29 | 1.83 | 1.78 | 1.73 | 1.68 | 1.65 | 1.62 | 1.58 | 1.55 | 1.51 | 1.41 |
| 30 | 1.82 | 1.77 | 1.72 | 1.67 | 1.64 | 1.61 | 1.57 | 1.54 | 1.50 | 1.46 |
| 40 | 1.76 | 1.71 | 1.66 | 1.61 | 1.57 | 1.54 | 1.51 | 1.47 | 1.42 | 1.38 |
| 60 | 1.71 | 1.66 | 1.60 | 1.54 | 1.51 | 1.48 | 1.44 | 1.40 | 1.35 | 1.29 |
| 120 | 1.65 | 1.60 | 1.55 | 1.48 | 1.45 | 1.41 | 1.37 | 1.32 | 1.26 | 1.19 |
| $\infty$ | 1.60 | 1.55 | 1.49 | 1.42 | 1.38 | 1.34 | 1.30 | 1.24 | 1.17 | 1.00 |

Tabella 9 - Valori dell'indice $D_{n,p}$ di Kolmogorov-Smirnov in corrispondenza ad una data numerosità $n$ ed una assegnata probabilità $p$ di ottenere un campione il cui indice $D_n$ sia maggiore o uguale a $D_{n,p}$.

| $p \rightarrow$ <br> $n \downarrow$ | .80 | .99 | .95 | .98 | .99 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | .900 | .950 | .975 | .990 | .995 |
| 2 | .684 | .776 | .842 | .900 | .929 |
| 3 | .565 | .636 | .708 | .785 | .829 |
| 4 | .493 | .565 | .624 | .689 | .734 |
| 5 | .447 | .509 | .563 | .627 | .669 |
| 6 | .410 | .468 | .519 | .577 | .617 |
| 7 | .381 | .436 | .483 | .538 | .576 |
| 8 | .358 | .410 | .454 | .507 | .542 |
| 9 | .339 | .387 | .430 | .480 | .513 |
| 10 | .323 | .369 | .409 | .457 | .489 |
| 11 | .308 | .352 | .391 | .437 | .468 |
| 12 | .296 | .338 | .375 | .419 | .449 |
| 13 | .285 | .325 | .361 | .404 | .432 |
| 14 | .275 | .314 | .349 | .390 | .418 |
| 15 | .266 | .304 | .338 | .377 | .404 |
| 16 | .258 | .295 | .327 | .366 | .392 |
| 17 | .250 | .286 | .318 | .355 | .381 |
| 18 | .244 | .279 | .309 | .346 | .371 |
| 19 | .237 | .271 | .301 | .337 | .361 |
| 20 | .232 | .265 | .294 | .329 | .352 |
| 21 | .226 | .259 | .287 | .321 | .344 |
| 22 | .221 | .253 | .281 | .314 | .337 |
| 23 | .216 | .247 | .275 | .307 | .330 |
| 24 | .212 | .242 | .269 | .301 | .323 |
| 25 | .208 | .238 | .264 | .295 | .317 |
| 26 | .204 | .233 | .259 | .290 | .311 |
| 27 | .200 | .229 | .254 | .284 | .305 |
| 28 | .197 | .225 | .250 | .279 | .300 |
| 29 | .193 | .221 | .246 | .275 | .295 |
| 30 | .190 | .218 | .242 | .270 | .290 |
| 35 | .177 | .202 | .224 | .251 | .269 |
| 40 | .165 | .189 | .210 | .235 | .252 |
| 45 | .156 | .179 | .198 | .222 | .238 |
| 50 | .148 | .170 | .188 | .211 | .226 |
| 60 | .136 | .155 | .172 | .193 | .207 |
| 70 | .126 | .144 | .160 | .179 | .192 |
| 80 | .118 | .135 | .150 | .167 | .179 |
| 90 | .111 | .127 | .141 | .158 | .169 |
| 100 | .106 | .121 | .134 | .150 | .161 |

# Bibliografia

AA.VV. - *Standard Mathematical Tables* - The Chemical Rubber Co. - Cleveland, 1964

P.Baldi - *Calcolo delle probabilità e statistica* - McGraw-Hill Libri Italia - Milano, 1992

F.Brambilla - *Trattato di statistica - Matematica per statistici - Esercizi di statistica* - a cura di D.M.Cifarelli - UTET - Torino, 1970

M.A.Brovelli, F.Migliaccio - *Trattamento statistico dei dati - Esercizi* - CLUP Città Studi - 1989

N.R.Draper, H.Smith - *Applied Regression Analysis* - John Wiley & Sons, Inc. - New York-London-Sydney, 1966

F.E.Fischer - *Fundamental Statistical Concepts* - Canfield Press San Francisco - 1973

W.Feller - *An Introduction to Probability Theory and its applications* - Vol II - John Wiley & Sons, Inc. - New York-London-Sydney, 1966

B.V.Gnedenko - *Teoria della probabilità* - Editori Riuniti - Edizioni Mir - 1987

C.W.Helstrom - *Probability and Stochastic Processes for Engineers* - Macmillan Publishing Company - 1991

D.V.Lindley - *Introduction to Probability & Statistics from bayesian viewpoint - Part I - Probability* - Cambridge University Press, 1965

D.V.Lindley - *Introduction to Probability & Statistics from bayesian viewpoint - Part II - Inference* - Cambridge University Press, 1965

S.Lipschutz - *Calcolo delle probabilità - 500 Esercizi risolti* - Collana Schaum - ETAS Libri - Milano, 1975

A.M.Mood, F.A.Graybill, D.C.Boes - *Introduction to the Theory of Statistics* - McGraw-Hill Book Company - 1963

A.Papoulis - *Probability, Random Variables and Stochastic Processes* - McGraw-Hill Book Company - 1965

F.Ricci - *Statistica ed elaborazione statistica delle informazioni* - Zanichelli - Bologna, 1975

F.Sansó - *Quaderni di trattamento statistico dei dati - Elementi di teoria della probabilità* - Città Studi Edizioni - Milano, 1996

F.Sansó - *Quaderni di trattamento statistico dei dati - La teoria della stima* - Città Studi Edizioni - Milano, 1996

F.Sansó - *Quaderni di trattamento statistico dei dati - La verifica di ipotesi* - Città Studi Edizioni - Milano, 1996

F.Sansó - *Quaderni di trattamento statistico dei dati - Complementi di teoria della probabilità* - Città Studi Edizioni - Milano, 1997

A.A.Sveshnikov - *Problems in Probability Theory, Mathematical Statistics and Theory of Random Functions* - Dover Publications - New York - 1968

G.Togliatti - *Fondamenti di statistica* - Clup - Milano, 1971