Alberta Albertella, Maria Antonia Brovelli,
Federica Migliaccio, Giovanna Sona

ESERCIZI DI TRATTAMENTO STATISTICO DEI DATI

Stima
Inferenza statistica
Catene di Markov
Processi stocastici

CittàStudiEdizioni

CittàStudiEdizioni: p.za L. da Vinci, 7 - 20133 Milano

© 1997 UTET Libreria srl
via P. Giuria 20 - 10125 Torino

Copertina: Studio Brief
Impaginazione elettronica: Cristina Giannetto
Disegni: Cinzia Vajani

I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica, di riproduzione e di adattamento totale o parziale, con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche), sono riservati per tutti i Paesi.

L'Editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre una porzione non superiore a un decimo del presente volume e fino a un massimo di settantacinque pagine.

Le richieste di riproduzione vanno inoltrate all'Associazione Italiana per i Diritti di Riproduzione delle Opere dell'ingegno (AIDRO), via delle Erbe, 2 - 20121 Milano. Tel. e fax 02/809506

Stampa: A.G. Bianca & Volta - Truccazzano

ISBN 88-251-7211-7

prima edizione: ottobre 1997

Ristampa:	I	II	III	IV
	1997	1998	1999	2000

Esercizi di trattamento statistico dei dati

Alberta Albertella, Maria Antonia Brovelli,
Federica Migliaccio, Giovanna Sona

VOLUME II

Introduzione

Durante gli ultimi anni, le autrici si sono occupate delle esercitazioni di diversi corsi di trattamento dati presso la Facoltà di Ingegneria del Politecnico di Milano. Ciò ha consentito la creazione di una ricca raccolta di problemi diversificata e rappresentativa dei vari argomenti in cui i corsi si articolano, comprendente sia i problemi proposti agli studenti durante le esercitazioni numeriche, sia i temi d'esame.

Si è pensato di fare cosa utile, non solo agli allievi ingegneri ma anche agli studenti di diverse altre discipline per le quali sono previsti dai piani di studio corsi di base di statistica, raccogliere in forma organica tutto il materiale a disposizione. Tale materiale è stato ampliato, ove necessario, e corredato per ogni argomento da cenni introduttivi aventi carattere di richiami teorici, utili a comprendere i successivi svolgimenti dei problemi.

Gli argomenti trattati sono stati suddivisi in due volumi:

- I Calcolo delle probabilità, statistica descrittiva, propagazione della covarianza.
- II Teoria della stima, inferenza statistica, catene di Markov, processi stocastici.

Per ogni capitolo di ciascun volume sono stati scelti diversi esercizi "rappresentativi", svolti nel dettaglio in modo da fornire delle linee-guida utili per la soluzione dei successivi esercizi proposti. Per gli esercizi non svolti sono comunque fornite le soluzioni, utili ai fini della verifica, in quasi tutti i casi. Fanno eccezione alcuni esercizi la cui soluzione non è di tipo numerico ma è rappresentata da espressioni analitiche piuttosto complesse.

Le conoscenze matematiche necessarie ai fini della comprensione della materia trattata e della soluzione degli esercizi derivano dai primi due corsi di Analisi Matematica e dal corso di Geometria. Quindi, anche tutte le notazioni matematiche utilizzate devono essere considerate ampiamente note. [1]

A proposito della soluzione numerica dei problemi e ai fini della verifica dei risultati, si noti che tutti i calcoli (sia per gli esercizi risolti che per quelli solo proposti) sono stati eseguiti con una precisione di 10^{-6}.

Al termine di questi cenni introduttivi, le autrici desiderano ringraziare tutti coloro che a vario titolo hanno fornito ulteriore materiale per il testo o collaborazione nella revisione di alcuni capitoli. Vogliamo quindi ricordare i Proff. Luigi Mussio, Fausto Sacerdote e Fernando Sansó e i Dottori Mattia Crespi e Giovanna Venuti.

Ringraziamo anche Cristina Giannetto e Cinzia Vajani per la collaborazione tecnica.

[1] Si noti che la matrice trasposta di una matrice A è indicata con A^+.

Esercizi di trattamento statistico dei dati
Volume II

Sommario

6 TEORIA DELLA STIMA: IL METODO DELLA MASSIMA VEROSIMIGLIANZA

Statistiche e stimatori

Si consideri una variabile casuale campionaria N-dimensionale $\underline{X}^{(N)}$, cioé una variabile che descrive N repliche indipendenti dell'esperimento $\mathcal{E}$:

$$\underline{X}^{(N)} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix}$$

Si ha:

1) ogni componente della variabile campionaria ha la stessa distribuzione di X; in particolare $\mu_{X_i} = \mu$, $\sigma^2_{X_i} = \sigma^2 \quad \forall i$.

2) tutte le componenti sono indipendenti tra loro.

La funzione densità di probabilità della variabile campionaria è data da:

$$\begin{aligned} f_{\underline{X}}(\underline{x};\vartheta) &= f_{\underline{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_N;\vartheta) = \\ &= \prod_{i=1}^{N} f_X(x_i;\vartheta) = L(\underline{X},\vartheta) \end{aligned}$$

ed è detta likelihood o "funzione di verosimiglianza".

Una statistica $S(\underline{X}^{(N)})$ è una qualunque funzione, a una o più dimensioni, della variabile campionaria $\underline{X}^{(N)}$ (è quindi a sua volta una variabile casuale). Il problema della stima di una grandezza ϑ con il metodo della massima verosimiglianza si può riassumere nel modo seguente: data una certa funzione di likelihood $L(\underline{x};\vartheta)$ si cerca un'opportuna statistica $T(\underline{X}^{(N)})$, con una distribuzione sufficientemente concentrata attorno al valore ϑ, in modo tale che un'estrazione t da T, calcolata in corrispondenza ad un campione estratto $\underline{x}$ ($t = T(\underline{x})$) abbia un'elevata probabilità di essere vicina a ϑ.

T è detto stimatore di ϑ, mentre $t = T(\underline{x})$ stima.

Proprietà degli stimatori

Correttezza: T è uno stimatore corretto (unbiased) di ϑ quando ha bias nullo, cioè:

$$b(\vartheta) = E\{T(\underline{X})|\vartheta\} - \vartheta = 0$$

- la media campionaria $\mathcal{M} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$ è uno stimatore corretto di $\mu : E\{\mathcal{M}\} = \mu$;
- i momenti semplici campionari di ordine n qualsiasi sono stime corrette dei corrispondenti momenti della distribuzione sottostante

$$\mathcal{M}_n = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^n \longrightarrow E\{\mathcal{M}_n\} = \mu_n$$

- la varianza campionaria non è uno stimatore corretto della varianza teorica della popolazione sottostante

$$\mathcal{S}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mathcal{M})^2$$
$$E\{\mathcal{S}^2\} = \frac{N-1}{N}\sigma^2$$

- la varianza campionaria corretta (stimatore corretto di σ^2) è:

$$\overline{\mathcal{S}}^2 = \frac{N}{N-1}\mathcal{S}^2$$

Diminuzione del bias: se T è uno stimatore corretto di ϑ, in generale $g(T)$ non è uno stimatore corretto di $g(\vartheta)$, a meno che g non sia funzione lineare. Tuttavia se $\sigma^2(T)$ è abbastanza piccolo si può porre in modo approssimato:

$$E\{g(T)\} \cong g(E\{T\}) = g(\vartheta) \ .$$

Qualora questa approssimazione non bastasse, si può ridurre il bias di $g(T)$ portandolo ad un infinitesimo di ordine superiore, considerando lo stimatore:

$$G(T) = g(T) - \frac{1}{2}\sigma_T^2 g''(T)$$

(formula utile quando si sappia calcolare σ_T^2).

Consistenza: uno stimatore è consistente quando $\lim_{N\to\infty} T(\underline{X}^{(N)}) = \vartheta$ in probabilità. In pratica spesso si fa ricorso alla condizione sufficiente:

$$\begin{cases} \lim_{N\to\infty} E\{T(\underline{X}^{(N)})\} = \vartheta \\ \lim_{N\to\infty} \sigma^2(T(\underline{X}^{(N)})) = 0 \end{cases}$$

Sufficienza: $S(\underline{X}^{(N)})$ è una statistica sufficiente per il parametro ϑ e la famiglia $f_{\underline{X}}(\underline{x};\vartheta)$ se la distribuzione della variabile campionaria $\underline{X}$ condizionata a $S = s$ risulta indipendente da ϑ, cioé se:

$$L(\underline{x};\vartheta|S = s) = H(\underline{X})$$

Teorema di fattorizzazione: condizione necessaria e sufficiente perché $S(\underline{X})$ sia una statistica sufficiente per ϑ e per la famiglia $f_{\underline{X}}(\underline{x};\vartheta)$ è che:

$$L(\underline{x};\vartheta) = K(s,\vartheta) \cdot H(\underline{X})$$

Sufficienza minimale: S è sufficiente minimale se è costante sul sistema più esteso di superfici di livello $S(\underline{x}) = s$, in quanto sarà anche quella che varia di meno pur mantenendo tutta l'informazione su ϑ. Per una statistica sufficiente minimale il rapporto di likelihood

$$\frac{L(\underline{x};\vartheta)}{L(\underline{y};\vartheta)}$$

è indipendente da ϑ.

Per trovare la statistica sufficiente minimale si esamina il rapporto di likelihood, e si vede su quali superfici esso è indipendente da ϑ.

Completezza: la statistica $S(\underline{X})$ è completa per la famiglia $f_{\underline{X}}(\underline{x};\vartheta)$ se la sola funzione $h(S)$ per cui vale $E\{h(S)|\ \forall\vartheta\}=0$ è $h(S)\equiv 0$.

Minima varianza: se si considera l'errore quadratico medio di stima:

$$\mathcal{E}^2 = E\{[T(\underline{X})-\vartheta]^2\} = \sigma^2(T(\underline{X});\vartheta)+b^2(\vartheta)$$

e ci si limita agli stimatori corretti ($b(\vartheta)\equiv 0$) esiste uno ed un solo stimatore (corretto) che minimizza l'errore quadratico medio di stima: questo è lo stimatore di minima varianza.

Informazione: il parametro $i(\vartheta) = -E\{\partial^2 \log L(\underline{x};\vartheta)\}$ è una misura del massimo di informazione ottenibile dai dati empirici sul parametro ϑ. Nel caso in cui ϑ sia m-dimensionale si utilizza la matrice di informazione:

$$\mathcal{I}(\vartheta) = -E\{\partial_\vartheta^+\partial_\vartheta \log L\}$$

Nota: $\partial_\vartheta^+\partial_\vartheta \log L$ è la matrice delle derivate seconde di $\log L$. Quindi ad esempio se $m=2$:

$$\mathcal{I}(\vartheta) = \begin{bmatrix} -E\{\frac{\partial^2}{\partial\vartheta_1^2}\log L\} & -E\{\frac{\partial^2}{\partial\vartheta_1\partial\vartheta_2}\log L\} \\ -E\{\frac{\partial^2}{\partial\vartheta_2\partial\vartheta_1}\log L\} & -E\{\frac{\partial^2}{\partial\vartheta_2^2}\log L\} \end{bmatrix}$$

per $\vartheta=(\vartheta_1,\vartheta_2)$.

Stime di massima verosimiglianza

Si ottengono cercando come stimatore di ϑ la statistica $T(\underline{X}^{(N)})$ che rende massima la funzione di verosimiglianza. Ciò equivale a considerare:

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\{L(\underline{x},\vartheta)\}=0$$

e alla verifica che il valore trovato sia effettivamente un massimo. In generale anziché utilizzare la relazione precedente si preferisce considerare:

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\{\log L(\underline{x},\vartheta)\}=0\ ,$$

che, per le caratteristiche della funzione logaritmo, fornisce le stesse informazioni della precedente.

Nota: se ϑ è un parametro m-dimensionale si considera:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\vartheta_1}\{\log L(\underline{x},\vartheta)\} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial\vartheta_m}\{\log L(\underline{x},\vartheta)\} = 0 \end{cases}$$

Problemi risolti

Esercizio 6.1

Si scrivano le funzioni di likelihood per campioni bernoulliani di numerosità N tratti dalle variabili casuali:

binomiale	$P(K=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$(\vartheta = p)$
poissoniana	$P(K=k) = e^{-\mu}\dfrac{\mu^k}{k!}$	$(\vartheta = \mu)$
normale	$f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$	$(\vartheta = (\mu, \sigma^2))$
esponenziale	$f_X(x) = \dfrac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}}$	$(\vartheta = \mu)$
Γ con k gradi di libertà	$f_X(x) = \rho(\rho x)^{k-1} \dfrac{e^{-\rho x}}{\Gamma(k)}$	$(\vartheta = (\rho, k))$
Cauchy	$f_X(x) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{1}{1+(x-\mu)^2}$	$(\vartheta = \mu)$

Svolgimento

La variabile casuale campionaria N-dimensionale $\underline{X}^{(N)}$ ha funzione densità di probabilità :

$$L(\underline{x}; \vartheta) = f_{\underline{X}^{(N)}}(\underline{x}; \vartheta) = \prod_{i=1}^{N} f_X(x_i; \vartheta)$$

Tale funzione è detta "likelihood".

a)

$$\begin{aligned} L(k; \vartheta) &= \prod_{i=1}^{N} \binom{n}{k_i} p^{k_i} (1-p)^{n-k_i} = \\ &= \left[\prod_i \binom{n}{k_i}\right] p^{\sum_i k_i} (1-p)^{\sum_i n-k_i} = \end{aligned}$$

$$= \exp\left\{\log\prod_i \binom{n}{k_i} + \sum_i k_i \log p + \sum_i (n-k_i)\log(1-p)\right\} =$$
$$= \exp\left\{\sum_i \log\binom{n}{k_i} + \sum_i k_i(\log p - \log(1-p)) + \sum_i n\log(1-p)\right\} =$$
$$= \exp\left\{\sum_i \log\binom{n}{k_i} + \log\frac{p}{1-p}\sum_i k_i + nN\log(1-p)\right\}$$

b)

$$\begin{aligned} L(\underline{k},\mu) &= \prod_{i=1}^{N} e^{-\mu}\frac{\mu^{k_i}}{k_i!} = \\ &= e^{-N\mu}\mu^{\sum_i k_i}\prod_i \frac{1}{k_i!} = \\ &= \exp\left\{-\mu N + \log\mu\sum_i k_i + \sum_i \log\frac{1}{k_i!}\right\} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} L(\underline{x},(\mu,\sigma^2)) &= \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2} = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i (x_i-\mu)^2} = \\ &= exp\{-N\log\sqrt{2\pi\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_i (x_i-\mu)^2\} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} L(\underline{x};\mu) &= \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\mu} e^{-x_i/\mu} = \\ &= \left(\frac{1}{\mu}\right)^N e^{-\sum_i \frac{x_i}{\mu}} = \\ &= \exp\left\{-N\log\mu - \sum_i \frac{x_i}{\mu}\right\} \end{aligned}$$

e)

$$L(\underline{x};(\rho,k)) = \prod_{i=1}^{N} \rho(\rho x_i)^{k-1}\frac{e^{-\rho x_i}}{\Gamma(k)} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \rho^N \rho^{N(k-1)} \left(\prod_i x_i^{k-1}\right) \left(\frac{1}{\Gamma(k)}\right)^N e^{-\rho\sum_i x_i} = \\
&= \frac{\rho^{Nk}}{\Gamma(k)^N} e^{-\rho\sum_i x_i} \prod_i x_i^{k-1} = \\
&= \exp\left\{Nk\log\rho - N\log\Gamma(k) - \rho\sum_i x_i + (k-1)\sum^{i}\log x_i\right\}
\end{aligned}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
L(\underline{x};\mu) &= \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\pi}\ \frac{1}{1+(x_i-\mu)^2} = \\
&= \left(\frac{1}{\pi}\right)^N \prod_i \frac{1}{1+(x_i-\mu)^2} = \\
&= \exp\left\{-N\log\pi - \sum_i \log[1+(x_i-\mu)^2]\right\}
\end{aligned}
$$

Esercizio 6.2

Si riconoscano nell'esercizio precedente quelle likelihood che appartengono alla più vasta famiglia esponenziale, quelle cioè che possono essere messe nella forma:

$$
L(\underline{x},\vartheta) = \exp\{a(\vartheta)\sum_{i=1}^{N} b(x_i) + Nc(\vartheta) + \sum_{i=1}^{N} d(x_i)\}\ .
$$

In particolare si discuta il caso della normale quando $\vartheta = \mu$ (σ^2 noto) o $\vartheta = \sigma^2$ (μ noto).

Svolgimento

a) la likelihood derivata dalla distribuzione binomiale è data da:

$$
L(\underline{k};p) = \exp\left\{\log\frac{p}{1-p}\sum_i k_i + Nn\log(1-p) + \sum_i \log\binom{n}{k_i}\right\}
$$

Questa appartiene alla famiglia esponenziale con:

$$
\begin{aligned}
&a(\vartheta) = \log\frac{p}{1-p} \\
&b(x_i) = k_i \\
&c(\vartheta) = n\log(1-p) \\
&d(x_i) = \binom{n}{k_i}
\end{aligned}
$$

b) la likelihood derivata dalla distribuzione poissoniana:

$$L(\underline{k}, \mu) = \exp\{\log \mu \sum_i k_i - N\mu - \sum_i \log k_i!\}$$

appartiene alla famiglia esponenziale con:

$$\begin{aligned}
&a(\vartheta) = \log \mu \\
&b(x_i) = k_i \\
&c(\vartheta) = -\mu \\
&d(x_i) = -\log(k_i!)
\end{aligned}$$

c) la likelihood derivata dalla distribuzione normale:

$$\begin{aligned}
L(\underline{x}, (\mu, \sigma^2)) &= \exp\left\{-\frac{N}{2}\log 2\pi\sigma^2 - \sum_i \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} = \\
&= \exp\left\{-\frac{N}{2}\log 2\pi\sigma^2 - \sum_i \frac{x_i^2+\mu^2-2x_i\mu}{2\sigma^2}\right\} = \\
&= \exp\left\{-\frac{N}{2}\log 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_i x_i^2 - \frac{N\mu^2}{2\sigma^2} + \frac{\mu}{\sigma^2}\sum_i x_i\right\}
\end{aligned}$$

in generale non appartiene alla famiglia esponenziale. Se $\sigma^2 = \overline{\sigma}^2$ è noto:

$$\begin{aligned}
L(\underline{x}, \mu) &= \exp\left\{\mu\sum_i \frac{x_i}{\sigma^2} - \frac{N}{2\sigma^2}\mu^2 - \sum_i \frac{x_i^2}{2\sigma^2} - \frac{N}{2}\log 2\pi\sigma^2\right\} = \\
&= \exp\left\{\mu\sum_i \frac{x_i}{\sigma^2} - \frac{N}{2}\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + \log 2\pi\sigma^2\right) - \sum_i \frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right\}
\end{aligned}$$

appartiene alla famiglia esponenziale, con:

$$\begin{aligned}
&a(\vartheta) = \mu \\
&b(x_i) = \frac{x_i}{\sigma^2} \\
&c(\vartheta) = -\frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\log 2\pi\sigma^2 \\
&d(x_i) = -\frac{x_i^2}{2\sigma^2}
\end{aligned}$$

Se $\mu = \overline{\mu}$ è noto:

$$L(\underline{x}, \sigma^2) = \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i(2x_i\mu - x_i^2) - N\left(\frac{\log 2\pi\sigma^2}{2} + \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)\right\}$$

appartiene alla famiglia esponenziale con:

$$\begin{aligned}
a(\vartheta) &= \frac{1}{2\sigma^2}\\
b(x_i) &= 2x_i\mu - x_i^2\\
c(\vartheta) &= -\left(\frac{\log 2\pi\sigma^2}{2} + \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)\\
d(x_i) &= 0
\end{aligned}$$

d) la likelihood derivata dalla distribuzione esponenziale:

$$L(\underline{x}, \vartheta) = \exp\left\{-\frac{1}{\mu}\sum_i x_i - N\log\mu\right\}$$

appartiene alla famiglia esponenziale, con:

$$\begin{aligned}
a(\vartheta) &= -\frac{1}{\mu}\\
b(x_i) &= x_i\\
c(\vartheta) &= -\log\mu\\
d(x_i) &= 0
\end{aligned}$$

e) la likelihood derivata dalla distribuzione Γ con k gradi di libertà:

$$L(\underline{x}, (\rho, k)) = \exp\left\{(k-1)\sum_i \log x_i - \rho\sum_i x_i + N\log\frac{\rho^k}{\Gamma(k)}\right\}$$

con ρ noto, appartiene alla famiglia esponenziale con:

$$\begin{aligned}
a(\vartheta) &= k - 1\\
b(x_i) &= \log x_i\\
c(\vartheta) &= \log\frac{\rho^k}{\Gamma(k)}\\
d(x_i) &= -\rho x_i\ ;
\end{aligned}$$

con k noto, appartiene alla famiglia esponenziale con:

$$\begin{aligned}
a(\vartheta) &= -\rho \\
b(x_i) &= x_i \\
c(\vartheta) &= \log \frac{\rho^k}{\Gamma(k)} \\
d(x_i) &= (k-1)\log x_i
\end{aligned}$$

f) la likelihood derivata dalla distribuzione di Cauchy:

$$L(\underline{x};\mu) = \exp\{-\sum_i \log[1+(x_i-\mu)^2] - N\log\pi\}$$

non appartiene alla famiglia esponenziale, in quanto non può essere scritta nella forma che caratterizza tale famiglia.

Esercizio 6.3

Si dimostri che la media del quadrato della varianza campionaria è data da

$$E\{\mathcal{S}^4\} = \frac{N-1}{N}\left(1-\frac{2}{N}+\frac{3}{N^2}\right)\sigma^4 + \frac{1}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)^2\mu_4\,.$$

Svolgimento

Per definizione di varianza si ha che:

$$\begin{aligned}
E\{\mathcal{S}^4\} &= E\{[\frac{1}{N}\sum_i (X_i-\mathcal{M})^2]^2\} = \frac{1}{N^2}E\{[\sum_i (X_i-\mathcal{M})^2]^2\} = \\
&= \frac{1}{N^2}E\{[\sum_i (X_i - \frac{1}{N}\sum_j X_j)^2]^2\} = \\
&= \frac{1}{N^2}E\{[\sum_i (X_i^2 - \frac{2}{N}\sum_j X_jX_i + \frac{1}{N^2}\sum_{jk} X_jX_k)]^2\} = \\
&= \frac{1}{N^2}E\{[\sum_i X_i^2 - \frac{2}{N}\sum_{ij} X_jX_i + \frac{1}{N^2}\sum_{ijk} X_jX_k)]^2\} = \\
&= \frac{1}{N^2}E\{[\sum_i X_i^2 - \frac{1}{N}\sum_{ij} X_iX_j]^2\} = \\
&= \frac{1}{N^2}E\{\sum_{ij} X_i^2X_j^2 - \frac{2}{N}\sum_{ijk} X_i^2X_jX_k + \frac{1}{N^2}\sum_{ijk\ell} X_iX_jX_kX_\ell\}
\end{aligned}$$

Per usare la proprietà di indipendenza fra le X_i conviene, a questo punto, separare le somme per ricondursi a prodotti di variabili casuali diverse; per esempio:

$$E\{\sum_{ij} X_i^2 X_j^2\} = E\{\sum_i X_i^4 + \sum_{ij,i\neq j} X_i^2 X_j^2\} =$$
$$= N\mu_4 + \sum_{ij,i\neq j} E\{X_i^2\}E\{X_j^2\} = N\mu_4 + N(N-1)\mu_2^2$$

L'espressione precedente quindi diventa:

$$\frac{1}{N^2}E\{\sum_i X_i^4 + \sum_{i\neq j} X_i^2 X_j^2 - \frac{2}{N}(\sum_i X_i^4 + \sum_{i\neq k} X_i^3 X_k + \sum_{i\neq j} X_i^2 X_j^2 +$$
$$+\sum_{i\neq j} X_i^3 X_j) + +\frac{1}{N^2}(\sum_i X_i^4 + 4\sum_{i\neq j} X_i^3 X_j + 3\sum_{i\neq j} X_i^2 X_j^2 +$$
$$+ 6\sum_{i\neq j\neq k} X_i^2 X_j X_k + \sum_{i\neq j\neq k\neq \ell} X_i X_j X_k X_\ell)\} =$$
$$= \frac{1}{N^2}E\{\left(1-\frac{1}{N}\right)^2 \sum_i X_i^4 + \left(-\frac{4}{N}+\frac{4}{N^2}\right)\sum_{i\neq j} X_i^3 X_j +$$
$$+\left(1-\frac{2}{N}+\frac{3}{N^2}\right)\sum_{i\neq j} X_i^2 X_j^2 + \frac{6}{N^2}\sum_{i\neq j\neq k} X_i^2 X_j X_k +$$
$$+\frac{1}{N^2}\sum_{i\neq j\neq k\neq \ell} X_i X_j X_k X_\ell\} =$$
$$= \frac{1}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)^2 \mu_4 + \left(1-\frac{2}{N}+\frac{3}{N^2}\right)\frac{1}{N}(N-1)\mu_2^2$$

Si osservi che nell'ultimo passaggio è stato posto $\mu = 0$ dato che la varianza risulta essere invariante per traslazioni.

Esercizio 6.4

Si dimostri che $\mathcal{M}_{XY}$ è uno stimatore consistente di $\mu_{XY} = E\{XY\}$, se μ_{4X} ed μ_{4Y} sono limitati.

(Si tenga conto che per $i \neq k$ $E\{X_i Y_i X_k Y_k\} = \mu_{XY}^2$, mentre $E\{X_i^2 Y_i^2\}^2 \leq \mu_{4X}\mu_{4Y}$).

Svolgimento

Per definizione uno stimatore $T(\underline{X}^{(N)})$ di ϑ è consistente se, al tendere della numerosità del campione all'infinito, tende in probabilità a ϑ. Una condizione sufficiente per verificare la consistenza dello stimatore $\mathcal{M}_{XY}$ è:

$$\lim_{N\to\infty} E\{\mathcal{M}_{XY}\} = M_{XY}$$
$$\lim_{N\to\infty} \sigma^2(\mathcal{M}_{XY}) = 0$$

La prima relazione è sempre soddisfatta, poiché $\mathcal{M}_{XY}$ è uno stimatore corretto di μ_{XY}. Per la seconda si considera invece:

$$\begin{aligned}
\sigma^2(\mathcal{M}_{XY}) &= E\{(\mathcal{M}_{XY} - \mu_{XY})^2\} = E\{\mathcal{M}_{XY}^2\} - \mu_{XY}^2 \\
E\{\mathcal{M}_{XY}^2\} &= E\left\{\sum_i \sum_k \frac{X_iY_i}{N}\frac{X_kY_k}{N}\right\} = \\
&= E\left\{\sum_i \frac{X_i^2Y_i^2}{N^2} \sum_i \sum_{k\neq i} \frac{X_iX_kY_iY_k}{N^2}\right\} = \\
&= E\left\{\sum_i \frac{X_i^2Y_i^2}{N^2}\right\} + \frac{N-1}{N}E\left\{\sum_i \frac{X_iY_i}{N} \cdot \sum_{k\neq i} \frac{X_kY_k}{N-1}\right\} = \\
&= E\left\{\sum_i \frac{X_i^2Y_i^2}{N^2}\right\} + \frac{N-1}{N}\mu_{XY}^2 \\
&\leq \frac{1}{N}\sqrt{\mu_{4X} \cdot \mu_{4Y}} + \frac{N-1}{N}\mu_{XY}^2
\end{aligned}$$

Si osservi che la disuguaglianza precedente deriva dal fatto che:

$$E\{X_i^2Y_i^2\}^2 \leq \mu_{4X} \cdot \mu_{4Y}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\sigma^2(\mathcal{M}_{XY}) &\leq \frac{1}{N}\sqrt{\mu_{4X} \cdot \mu_{4Y}} + \frac{N-1}{N}\mu_{XY}^2 - \mu_{XY}^2 = \\
&= \frac{1}{N}\sqrt{\mu_{4X} \cdot \mu_{4Y}} - \frac{\mu_{XY}^2}{N}
\end{aligned}$$

Se μ_{4X} e μ_{4Y} sono limitati:

$$\lim_{N\to\infty} \sigma^2(\mathcal{M}_{XY}) \leq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sqrt{\mu_{4X} \cdot \mu_{4Y}} - \frac{\mu_{XY}^2}{N} = 0$$

Ne consegue che lo stimatore $\mathcal{M}_{XY}$ è consistente.

Esercizio 6.5

Siano $X_i \sim \mathcal{N}[a + bt_i, \sigma^2]$ indipendenti tra loro: si dimostri che la statistica sufficiente minimale per $\underline{\vartheta} = (a, b, \sigma^2)$ è

$$S = (\sum_{i=1}^{N} X_i, \sum_{i=1}^{N} X_i t_i, \sum_{i=1}^{N} X_i^2)$$

Svolgimento
La funzione di likelihood per la distribuzione normale è data da:

$$L(\underline{x}; \vartheta) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\sum_i \frac{(x_i - a - bt_i)^2}{2\sigma^2}}$$

Il rapporto di likelihood si scrive:

$$\begin{aligned} \frac{L(\underline{x}; \vartheta)}{L(\underline{y}; \vartheta)} &= \frac{e^{-\sum_i \frac{(x_i - a - bt_i)^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\sum_i \frac{(y_i - a - bt)^2}{2\sigma^2}}} = \\ &= exp\{\frac{1}{2\sigma^2}[\sum_i (y_i - a - bt_i)^2 - \sum_i (x_i - a - bt_i)^2]\} \end{aligned}$$

Questo rapporto è indipendente da $\underline{\vartheta} = (a, b, \sigma^2)$ se:

$$\begin{aligned} & \sum_i (y_i^2 + a^2 + b^2 t_i^2 - 2y_i a - 2y_i bt_i + 2abt_i) + \\ - & \sum_i (x_i^2 + a^2 + b^2 t_i^2 - 2x_i a - 2x_i bt_i + 2abt_i) = 0 \end{aligned}$$

Ne segue che deve essere:

$$\begin{aligned} \sum_i y_i^2 = \sum_i x_i^2 &= \text{ costante} \\ \sum_i 2ay_i = \sum_i 2ax_i &= \text{ costante} \\ \sum_i 2bt_i y_i = \sum_i 2bt_i x_i &= \text{ costante} \end{aligned}$$

Resta perciò provato che la statistica sufficiente minimale è:

$$S = (\sum_i X_i^2;\ \sum_i X_i;\ \sum_i t_i X_i)$$

Esercizio 6.6

Si cerchi nella classe degli stimatori lineari lo stimatore corretto, di minima varianza, della media μ per una variabile campionaria non necessariamente normale le cui componenti X_i soddisfino le relazioni

$$E\{X_i\} = \mu \quad , \quad \sigma^2(X_i) = \frac{\sigma_0^2}{p_i} \qquad (p_i \text{ noti}).$$

Si osservi che in tal modo si legittima la formula della media pesata, indipendentemente dalla normalità della distribuzione.

Svolgimento

Lo stimatore lineare si può esprimere come:

$$T(X) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i X_i = g(\underline{X}) \ .$$

Poiché si vuole che sia corretto deve essere:

$$E(T) = \mu$$
$$E(T) = E\{\sum_i \lambda_i X_i\} = \sum_i(\lambda_i E\{X_i\}) = \sum_i \lambda_i \mu = \mu \sum_i \lambda_i = \mu$$

da cui:

$$\sum_i \lambda_i = 1$$

Nella classe degli stimatori lineari e corretti, si cercherà ora quello di minima varianza. L'errore quadratico medio di stima è:

$$\mathcal{E}^2 = \sigma^2(T) + b^2(\vartheta) \ .$$

Poiché lo stimatore è unbiased, si ha in questo caso:

$$\mathcal{E}^2 = \sigma^2(T) \ .$$

Minimizzando $\mathcal{E}^2$ sarà $\sigma^2(T)$ = minimo, con la condizione $\sum_i \lambda_i = 1$.

Applicando ora il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} \sum_i \lambda_i = 1 \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial\lambda_i}[\sigma^2(T)] = \gamma\dfrac{\partial}{\partial\lambda_i}[\sum_i \lambda_i - 1] \qquad (i = 1, \ldots, N) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_i\sigma_i^2 = \gamma \qquad\qquad \rightarrow \quad \lambda_i = \dfrac{\gamma}{2\sigma_i^2} \\ \\ \sum_i \lambda_i = \sum_i \dfrac{\gamma}{2\sigma_i^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \dfrac{\gamma}{2}\sum_i \dfrac{p_i}{\sigma_0^2} = 1 \end{cases}$$

Dalla seconda relazione:

$$\frac{\gamma}{2\sigma_0^2}\sum_i p_i = 1 \quad \rightarrow \quad \gamma = \frac{2\sigma_0^2}{\sum_i p_i}$$

$$\lambda_i = \frac{2\sigma_0^2}{\sum_i p_i} \cdot \frac{1}{2\sigma_i^2} = \frac{\sigma_0^2}{\sum_i p_i} \cdot \frac{p_i}{\sigma_0^2}$$

Quindi lo stimatore corretto di minima varianza è:

$$\begin{aligned} T(\underline{X}) &= \sum_i \lambda_i X_i = \sum_i \frac{p_i}{\sum_i p_i} X_i \\ &= \frac{\sum_i p_i X_i}{\sum p_i} \end{aligned}$$

che corrisponde alla formula della media pesata.

Esercizio 6.7

Si dimostri che il parametro ϑ della distribuzione esponenziale nella forma $f_X(x;\vartheta) = \vartheta e^{-\vartheta x}$, ha come stimatore corretto di minima varianza

$$T(\underline{X}) = \frac{N-1}{\sum_{i=1}^{N} X_i} .$$

(Si ragioni sulla statistica sufficiente minimale della distribuzione e si dimostri che T ne è funzione. Inoltre si dimostri la correttezza di T

tenendo conto che $\sum_{i=1}^{N} X_i$ è distribuita come una Γ ad N gradi di libertà, con parametro ϑ).

Svolgimento

Dalla teoria si sa che se uno stimatore T è funzione della statistica sufficiente minimale ed è allo stesso tempo corretto, esso coincide con lo stimatore corretto di minima varianza.

Ciò segue come corollario al teorema: sia data una famiglia di likelihood $L(\underline{x}, \vartheta)$; sia S una statistica sufficiente minimale per ϑ e per L e sia V uno stimatore corretto qualsiasi di ϑ.
Allora $T = E\{V|S\}$ è uno stimatore di minima varianza tra gli stimatori corretti; inoltre esso è unico.

Si deve quindi determinare la statistica sufficiente minimale della distribuzione.

$$\frac{L(\underline{x}; \vartheta)}{L(\underline{y}; \vartheta)} = \frac{e^{-\vartheta \sum_i x_i + N \log \vartheta}}{e^{-\vartheta \sum_i y_i + N \log \vartheta}} = e^{-\vartheta[\sum_i x_i - \sum_i y_i]}$$

Tale rapporto è indipendente da ϑ sulla superficie:

$$\sum_i x_i = \sum_i y_i = \text{ costante.}$$

Poiché T è dato da: $T = \frac{N-1}{\sum_i X_i}$, esso è funzione della statistica minimale.
Occorre quindi verificarne la correttezza, cioé deve essere:

$$E\{T(\underline{X})\} - \vartheta = 0$$

dove:

$$E\{T(\underline{X})\} = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{N-1}{\sum_i x_i} exp\{-\vartheta \sum_i x_i + N \log \vartheta\} d_N \underline{x}$$

Si consideri $S = \sum_i X_i$.

Poiché le X_i hanno una distribuzione esponenziale, la variabile S è distribuita come una Γ a N gradi di libertà con parametro ϑ. Quindi:

$$f_S(s) \;=\; \vartheta(\vartheta s)^{N-1} \frac{e^{-\vartheta s}}{(N-1)!}$$

$$
\begin{aligned}
E\left\{\frac{1}{S}\right\} &= \int_0^\infty \frac{1}{s}\vartheta(\vartheta s)^{N-1}\frac{e^{-\vartheta s}}{(N-1)!}ds = \\
&= \int_0^\infty \vartheta^2(\vartheta s)^{N-2}\frac{e^{-\vartheta s}}{(N-1)!}ds = \\
&= \frac{\vartheta}{N-1}\int_0^\infty \vartheta(\vartheta s)^{N-2}\frac{e^{-\vartheta s}}{(N-2)!}ds
\end{aligned}
$$

Poiché $\vartheta(\vartheta s)^{N-2}\frac{e^{-\vartheta s}}{(N-2)!}$ è una Γ a $N-1$ gradi di libertà, con parametro ϑ:

$$
E\left\{\frac{1}{S}\right\} = \frac{\vartheta}{N-1} \qquad E\left\{\frac{N-1}{\sum_i X_i} = \vartheta\right\} \;\Rightarrow\; E\{T(\underline{X})\} = 0
$$

Quindi $T(\underline{X})$ è uno stimatore corretto di minima varianza.

Esercizio 6.8

Si dimostri che per la famiglia esponenziale con parametro monodimensionale, l'informazione è data da

$$
i(\vartheta) = -Na'(\vartheta)\frac{d}{d\vartheta}\cdot\frac{c'(\vartheta)}{a'(\vartheta)}\,.
$$

Svolgimento

Per la famiglia esponenziale:

$$
\begin{aligned}
&\log L = a(\vartheta)\sum_i b(x_i) + Nc(\vartheta) + \sum_i d(x_i) \\
&U = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\log L = a'(\vartheta)\sum_i b(x_i) + Nc'(\vartheta) \\
&\frac{\partial U}{\partial\vartheta} = a''(\vartheta)\sum_i b(x_i) + Nc''(\vartheta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\left\{\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right\} &= \int_{\mathbb{R}^N}[a''(\vartheta)\sum_i b(x_i) + Nc''(\vartheta)]\cdot L(\underline{x};\vartheta)d_N\underline{x} = \\
&= a''(\vartheta)\int_{\mathbb{R}^N}[\sum_i b(x_i)]L(\underline{x};\vartheta)d_N\underline{x} + Nc''(\vartheta)\int_{\mathbb{R}^N}L(\underline{x};\vartheta)d_N\underline{x} =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= a''(\vartheta)E\{\sum_i b(x_i)\} + Nc''(\vartheta)\cdot 1 = \\
&= a''(\vartheta)\cdot\left[-N\frac{c'(\vartheta)}{a'(\vartheta)}\right] + Nc''(\vartheta) = \\
&= \frac{-Na''(\vartheta)\cdot c'(\vartheta)}{a'(\vartheta)} + Nc''(\vartheta) = \\
&= \frac{-Na''(\vartheta)\cdot c'(\vartheta) + Na'(\vartheta)\cdot c''(\vartheta)}{a'(\vartheta)} = \\
&= N\frac{-a''(\vartheta)\cdot c'(\vartheta) + a'(\vartheta)\cdot c''(\vartheta)}{a'(\vartheta)} = \\
&= Na'(\vartheta)\cdot\left[\frac{d}{d\vartheta}\ \frac{c'(\vartheta)}{a'(\vartheta)}\right]
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
i(\vartheta) = -E\left\{\frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right\} = -Na'(\vartheta)\cdot\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{c'(\vartheta)}{a'(\vartheta)}\right)
$$

Esercizio 6.9

Data la funzione densità di probabilità

$$
f_X(x,\vartheta) = \begin{cases} \vartheta^{-2}xe^{-x/\vartheta} & x \geq 0 \quad (\vartheta > 0) \\ 0 & x < 0 \end{cases}
$$

si dia l'espressione dello stimatore di massima verosimiglianza di ϑ e si verifichi se lo stimatore così trovato è corretto.

Dati i seguenti valori di x_i ($i = 1,\ldots,10$):

2.53	6.69	13.05	0.36	5.86	6.51	16.29	6.62	14.40	7.97

si determini il valore di $\hat{\vartheta}$.

Svolgimento

Lo stimatore di massima verosimiglianza di ϑ è dato da:

$$
\begin{aligned}
L(\underline{x};\vartheta) &= \prod_i f_X(x_i,\vartheta) = \prod_i \vartheta^{-2}x_ie^{-x_i/\vartheta} = \\
&= exp\{\log\prod_i \vartheta^{-2}x_ie^{-x_i/\vartheta}\} = \\
&= exp\{N\log\vartheta^{-2} + \sum_i \log x_i - \frac{1}{\vartheta}\sum_i x_i\}
\end{aligned}
$$

$$\log L(\underline{x};\vartheta) = N \log \vartheta^{-2} + \sum \log x_i - \frac{1}{\vartheta}\sum_i x_i$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \vartheta} = -\frac{2N}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta^2}\sum_i x_i = 0$$

e quindi si ha:

$$\hat{\vartheta} = \frac{1}{2N}\sum_i x_i$$

$$\hat{\vartheta} = 4.014$$

• Correttezza:

poiché la likelihood appena scritta appartiene alla famiglia esponenziale:

$$L(\underline{x};\vartheta) = exp\{a(\vartheta)\sum_i b(x_i) + Nc(\vartheta) + \sum_i d(x_i)\}$$

$$L(\underline{x};\vartheta) = exp\{-\frac{1}{\vartheta}\sum_i x_i + N \log \frac{1}{\vartheta^2} + \sum_i \log x_i\}$$

si può identificare:

$$\begin{cases} a(\vartheta) = -\frac{1}{\vartheta} \\ b(x_i) = x_i \\ c(\vartheta) = \log \frac{1}{\vartheta^2} \\ d(x_i) = \log x_i \end{cases}$$

E' noto che $B(\underline{X}) = \frac{1}{N}\sum_i b(x_i)$ è uno stimatore corretto di $\varphi = -\dfrac{c'(\vartheta)}{a'(\vartheta)}$; in questo caso si ha:

$$\varphi = 2\vartheta$$

quindi

$$E\{\frac{1}{N}\sum_i b(x_i)\} = E\{2\hat{\vartheta}\} = 2\vartheta$$

quindi lo stimatore trovato è corretto.

Esercizio 6.10

La variabile K, somma di due variabili geometriche con parametro ρ, ha distribuzione

$$P\{K = k\} = (1-\rho)^2(k+1)\rho^k \qquad (k \geq 0).$$

Dato un campione bernoulliano tratto da tale variabile $\{k_1, \ldots, k_N\}$.

a) Si trovi lo stimatore $\hat{\rho}$ di massima verosimiglianza di ρ.

b) Si dimostri che $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} K_i$ è uno stimatore corretto di $E\{K\} = \frac{2\rho}{1-\rho}$.

c) $\hat{\rho}$ non è uno stimatore corretto di ρ, tuttavia $E\{\frac{1}{N}\sum_i K_i\} = \frac{2\rho}{1-\rho} = g(\rho)$; si dimostri che $g(\hat{\rho})$ è uno stimatore corretto di $g(\rho)$.

Svolgimento

a) La funzione di likelihood per la variabile casuale K è data da:

$$L(k_1, \ldots, k_N|\rho) = (1-\rho)^{2N} \prod_i (k_i + 1)\rho^{k_i} =$$
$$= exp\{2N \log(1-\rho) + \sum_i \log(k_i + 1) + \sum_i k_i \log \rho\}$$

Si determina quindi la funzione di massima verosimiglianza:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \log L = -\frac{2N}{1-\rho} + \frac{\sum_i k_i}{\rho} = 0$$

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_i k_i}{2N + \sum_i k_i}$$

b) La variabile casuale considerata appartiene alla famiglia delle variabili casuali con distribuzione esponenziale:

$$L(\underline{x}; \vartheta) = exp\{a(\vartheta)\sum_i b(x_i) + Nc(\vartheta) + \sum_i d(x_i)\}$$

Per tale famiglia la statistica

$$B(\underline{X}) = \frac{1}{N}\sum_i b(x_i)$$

è uno stimatore corretto del parametro $\varphi = -\frac{c'(\vartheta)}{a'(\vartheta)}$.

Nel caso della variabile proposta dall'esercizio si ha:

$$\begin{cases} a(\vartheta) = \log \rho \\ b(x_i) = k_i \\ c(\vartheta) = 2\log(1-\rho) \\ d(x_i) = \log(k_i + 1) \end{cases}$$

e quindi $B(\underline{X}) = \frac{1}{N}\sum_i b(k_i)$ è uno stimatore corretto di $\varphi = \frac{2\rho}{1-\rho}$.

c) Si consideri:

$$g(\hat{\rho}) = \frac{2\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}} = 2\frac{\frac{\sum_i k_i}{\sum_i k_i + 2N}}{1 - \frac{\sum_i k_i}{\sum_i k_i + 2N}} = 2\frac{\sum_i k_i}{2N} = \frac{1}{N}\sum_i k_i$$

quindi:

$$E\{g(\hat{\rho})\} = E\{\frac{1}{N}\sum_i K_i\} = \frac{2\rho}{1-\rho} = g(\rho)$$

Esercizi

Esercizio 6.11

Si dimostri che per $\mathcal{N}[0,\sigma^2]$, la statistica $S = \sum_{i=1}^{N} X_i^2$ è completa.

(Si scriva la

$$E\{h(S)\} = \int_{\mathbb{R}^N} h\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) \frac{1}{2\pi^{N/2}\sigma^N} e^{-\sum_i \frac{x_i^2}{2\sigma^2}} d_N \underline{x}$$

e si esprima l'integrale in coordinate polari).

Esercizio 6.12

Si consideri uno stimatore lineare, omogeneo, qualsiasi

$$T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i X_i$$

della media teorica $\vartheta = \mu$.

Si scriva la condizione cui devono soddisfare le λ_i se si vuole che $T(\underline{X})$ sia corretto. Si osservi che la media campionaria $\mathcal{M}_X$ è l'unico stimatore di questo tipo, che sia simmetrico rispetto a $\{X_i\}$, cioé tale che per ogni permutazione $\{\pi(i)\}$ di $\{i\}$, dia sempre

$$T(\underline{X}) = \sum_i \lambda_i X_i = \sum_i \lambda_i X_{\pi(i)}$$

(Si noti che questa condizione implica che λ_i sia in realtà indipendente da i).

[**R:** $\sum_i \lambda_i = 1$]

Esercizio 6.13

Si consideri la classe degli stimatori quadratici, omogenei nella varianza teorica σ^2

$$\mathcal{S}(\underline{X}) = \sum_{i,k=1}^{N} \lambda_{ik} X_i X_k = \underline{X}^+ \Lambda \underline{X} \qquad (\Lambda^+ = \Lambda).$$

Si dimostri che la varianza corretta $\overline{S}_X^2$ è l'unico stimatore corretto di tale classe che soddisfa alle condizioni

a) $\overline{S}^2(\underline{X})$ sia invariante per traslazione

b) $\overline{S}^2(\underline{X})$ sia simmetrico in $\{X_i\}$, ovvero

$$S^2(X_i \dots X_N) = \overline{S}^2(X_{\pi(1)} \dots X_{\pi(N)})$$

per ogni permutazione di $\{1, 2, \dots, N\}$.

Si osservi che la condizione a) equivale a

$$\Lambda e = 0 \qquad\qquad e = [1\,1 \dots 1]^+ ,$$

mentre la condizione b) comporta che Λ abbia la forma $\Lambda = aI + bee^+$.

Esercizio 6.14

Sia dato un campione $\underline{X}^{(N)}$ tratto da una variabile della famiglia esponenziale

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}; \vartheta) = \exp\{a(\vartheta)b(\underline{x}) + c(\vartheta) + d(\underline{x})\} .$$

Si dimostri che la statistica

$$B(\underline{X}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} b(X_i)$$

è uno stimatore corretto del parametro

$$\varphi = -\frac{c'(\vartheta}{a'(\vartheta)} ,$$

ammesso che le funzioni in gioco siano adeguatamente regolari.

(Si scriva la condizione di normalizzazione $\int_{\mathbb{R}^N} L(\underline{x}; \vartheta) d_N\underline{x} = 1$ e si differenzi rispetto a ϑ).

Esercizio 6.15

Usando il risultato dell'esercizio precedente si dimostri che nella distribuzione

$$\frac{1}{\vartheta} e^{-x/\vartheta} \quad (x \geq 0) ,$$

ϑ rappresenta la media.

Esercizio 6.16

Posto che $\mathcal{M}$ sia uno stimatore unbiased di μ, si ricerchi uno stimatore di $e^{-\mu}$ che sia meno biased di $e^{-\mathcal{M}}$.

(Si noti che $\sigma^2(\mathcal{M})$ può essere semplicemente calcolato in base alla legge di propagazione degli errori, per la quale risulta $\sigma^2(\mathcal{M}) = \sigma_X^2/N$).

[**R:** $G(\mathcal{M}) = e^{-\mathcal{M}}\left[1 - \frac{2\sigma_X^2}{N}\right]$]

Esercizio 6.17

Si scriva per esteso la varianza $\sigma^2(\overline{\mathcal{S}^2})$ e si verifichi in particolare che per le distribuzioni normali

$$\sigma^2(\overline{\mathcal{S}}^2) = \frac{2\sigma^4}{N-1}$$

(Si ricordi che per le distribuzioni normali $\mu_4 = 3\sigma^4$).

[**R:** $\sigma^2_{(\overline{\mathcal{S}}^2)} = \frac{\mu_4}{N} - \frac{3-N}{N(N-1)}\sigma^4$]

Esercizio 6.18

Si dimostri che $\mathcal{M}_p = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} X_i^p$ è uno stimatore consistente di $\mu_p = E\{X^p\}$ qualora X abbia momenti finiti di tutti gli ordini; si deduce che per una tale variabile le variabili campionarie $\overline{\mathcal{M}}_3/\overline{\mathcal{S}}^3, \overline{\mathcal{M}}_4/\overline{\mathcal{S}}^4$ sono stime consistenti degli indici di skewness (β) e di curtosi (γ).

(Si noti che $\mathcal{M}_p$ è una stima corretta di μ_4 e si dimostri che vale $\lim\limits_{N\to\infty} \sigma^2(T(\underline{X}^{(N)})) = 0$ tenendo conto che

$$E\{\sum_{i,k} X_i^p X_k^p\} = N((N-1)\mu_p^2 + \mu_{2p}) \ .$$

Esercizio 6.19

Si dimostri che per la famiglia esponenziale (a un parametro)

$$L(\underline{x};\vartheta) = \exp\{a(\vartheta)\sum_{i=1}^{N} b(x_i) + Nc(\vartheta) + \sum_{i=1}^{N} d(x_i)\}$$

la statistica $S = \sum_i b(X_i)$ è sufficiente, mentre per l'esponenziale a q parametri $\underline{\vartheta} = (\vartheta_1 \ldots \vartheta_q)$

$$L(\underline{x}; \underline{\vartheta}) = \exp\{\sum_{k=1}^{q}\sum_{i=1}^{N} a_k(\underline{\vartheta}) b_k(x_i) + \ldots + \sum_{k=1}^{q} c_k(\underline{\vartheta}) + \sum_{k=1}^{N} d_k(x_i)\}$$

è sufficiente $S = \{\sum_i b_1(X_i), \ldots, \sum_i b_q(X_i)\}$.

Si scrivano gli stimatori sufficienti per $\vartheta = p$ nella binomiale, $\vartheta = \mu$ nella poissoniana, per $\underline{\vartheta} = (\rho, k)$ nella Γ.

[**R:** $S = \sum_i K_i$; $S = \sum_i K_i$; $S = \{\sum_i \log X_i, \sum_i X_i\}$]

Esercizio 6.20

Si dimostri, tramite il rapporto di likelihood, che per la famiglia esponenziale ad un parametro la statistica $S = \sum_{i=1}^{N} b(X_i)$ è sufficiente minimale.

Esercizio 6.21

Si dimostri che, in generale, per la famiglia a un parametro $f(x - \vartheta)$, l'informazione è data da

$$i(\vartheta) = \int \frac{[f'(x-\vartheta)]^2}{f(x-\vartheta)}\, dx$$

Esercizio 6.22

Si calcoli la matrice di informazione per la famiglia normale, per il parametro bidimensionale $\underline{\vartheta} = (\mu, \sigma^2)$.

[**R:** $\mathcal{I}(\mu, \sigma^2) = \begin{bmatrix} \frac{N}{\sigma^2} & \frac{2N\mu}{(\sigma^2)^2} \\ \frac{2N\mu}{(\sigma^2)^2} & \frac{(2\sigma^2-1)N}{2(\sigma^2)^2} \end{bmatrix}$]

Esercizio 6.23

Scrivere l'equazione di stima di massima verosimiglianza per la famiglia esponenziale, verificando che risulta:

$$a'(\vartheta) \sum_{i=1}^{N} b(x_i) + N c'(\vartheta) = 0 \ .$$

Trovare gli stimatori di massima verosimiglianza per ϑ nelle famiglie

a) binomiale $\quad f(k,\vartheta) = \binom{n}{k} \vartheta^k (1-\vartheta)^{n-k}$

b) poissoniana $\quad f(k,\vartheta) = \frac{\vartheta^k}{k!} e^{-\vartheta}$

c) esponenziale $\quad f(x;\vartheta) = \vartheta e^{-x\vartheta} \qquad (x \geq 0)$

d) $\Gamma(\vartheta = [k,\rho])$ $\quad f(x;\vartheta) = \frac{1}{\Gamma(k)} \rho (\rho x)^{k-1} e^{-\rho x} \qquad (x \geq 0)$

e) normale bivariata $\quad (\vartheta = [\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho])$

$$f(\underline{x};\vartheta) = \frac{exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right\}}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}$$

[**R:** a)$\hat{\vartheta} = \sum_i \frac{k_i}{nN}$; b)$\hat{\vartheta} = \sum_i \frac{k_i}{N}$; c)$\hat{\vartheta} = \sum_i \frac{x_i}{N}$;
d) $\hat{\vartheta} = [\hat{k}, \hat{\rho}]$, dove le seguenti relazioni definiscono implicitamente $\hat{\rho}$ e $\hat{k}$:

$$\hat{k} = \frac{\hat{\rho}}{N} \sum_i x_i \ ,$$

$$N \log \hat{\rho} + \frac{\hat{\rho}}{N} \sum_i x_i \sum_i \log x_i - \frac{N}{\Gamma(\hat{\rho}/N \sum_i x_i)} \Gamma'\left(\frac{\hat{\rho}}{N} \sum_i x_i\right) = 0 \ ;$$

e) $\hat{\mu}_X = \mathcal{M}_X, \quad \hat{\mu}_Y = \mathcal{M}_Y, \quad \hat{\sigma}_X^2 = \mathcal{S}_X^2, \quad \hat{\sigma}_Y^2 = \mathcal{S}_Y^2, \quad \hat{\rho} = \frac{\mathcal{S}_{XY}}{\mathcal{S}_X \mathcal{S}_Y}$]

Esercizio 6.24

Scrivere lo stimatore di massima verosimiglianza per la famiglia $X_i \sim \mathcal{N}[a + bt_i, \sigma^2]$ (t_i noti) con parametro $\vartheta = (a, b, \sigma^2)$ e verificare che $\hat{a}, \hat{b}$ sono corretti, mentre $\hat{\sigma}^2$ non lo è.

[**R:** $\hat{a} = \dfrac{\sum x_i \sum t_i^2 - (\sum x_i t_i) \cdot \sum t_i}{N \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2}$; $\hat{b} = \dfrac{N \sum x_i t_i - \sum x_i \cdot \sum t_i}{N \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2}$;

$\hat{\sigma}^2 = \sum_i \dfrac{(x_i - \hat{a} - \hat{b} t_i)^2}{N}$]

Esercizio 6.25

Sia M uno stimatore non deviato di μ; si determini uno stimatore di $y = \mu^3$ che sia meno deviato di M^3.

In particolare si supponga di voler eseguire la misura di una certa grandezza con uno strumento con precisione (scarto quadratico medio) = 0.1. Da informazioni precedenti ci si aspetta che $M \cong 1$ (valore approssimato).

Nell'ipotesi che si vogliano eseguire $N = 100$ misure, si dia una stima di μ^3 meno deviato di M^3.

(Suggerimento: si ricordi che se M è uno stimatore corretto di μ

$$E\{g(M)\} = E\{g(\mu) + (M-\mu)g'(\mu) + \frac{1}{2}g''(\mu)(M-\mu)^2 + o_2\}$$

con o_2 infinitesimo del 2° ordine).

[**R:** 0.9997]

Esercizio 6.26

Determinare la statistica sufficiente minimale per un campione di variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite caratterizzate da

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

con media e varianza incognite.

[**R:** $S = \left\{\sum_i X_i^2, \sum_i X_i\right\}$]

Esercizio 6.27

Sia X una variabile casuale con distribuzione

$$f_X(x, \vartheta) = \frac{C}{\vartheta^{1/4}} e^{-\frac{x^4}{\vartheta}}$$

con C opportuna costante di normalizzazione.

Sia poi $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$ un campione bernoulliano tratto da X.

a) Si dimostri che la costante C non dipende da ϑ ma è data da

$$C = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^4} d\xi \right)^{-1}$$

b) Si scriva la funzione di likelihood $L(\underline{x}; \vartheta)$ e si calcoli lo stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\vartheta}$.

c) Si dimostri che $E\{\hat{\vartheta}\} = 4E\{X^4\} = \vartheta$ e quindi anche che $\hat{\vartheta}$ è uno stimatore corretto di ϑ.

A tale scopo si osservi, nel calcolo di $E\{X^4\}$, che

$$x^4 e^{-\frac{x^4}{\vartheta}} = \vartheta^2 \frac{\partial}{\partial \vartheta} e^{-\frac{x^4}{\vartheta}}$$

[**R:** $L(\underline{x}; \vartheta) = \exp\{N \log \frac{C}{\vartheta^{1/4}} - \frac{1}{\vartheta} \sum_i x_i^4\}; \hat{\vartheta} = \dfrac{4}{N} \sum_i x_i^4$]

Esercizio 6.28

La variabile campionaria $X^{(N)} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix}$ ha come distribuzione la densità

$$\frac{C \frac{1}{\sigma^N}}{\left[1 + \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{\sigma^2}\right]^N} = L(\underline{x}; \mu, \sigma^2)$$

dove C è una costante opportuna indipendente da μ e da σ^2.

a) Si trovino gli stimatori di massima verosimiglianza di μ e σ^2;

b) si dica perché la funzione

$$f(x, y) = \frac{C}{1 + (x^2 + y^2)}$$

non può essere una densità di probabilità di una variabile casuale (X, Y), per nessun valore di C.

[**R:** $\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_i x_i \quad ; \quad \hat{\sigma}^2 = \sum_i (x_i - \hat{\mu})^2$]

Esercizio 6.29

Sia data la distribuzione triangolare

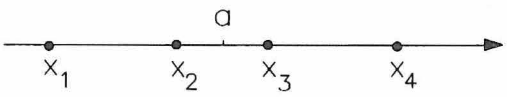
$$f_X(x; \vartheta) = \begin{cases} 1 - |x - \vartheta| & \vartheta - 1 \leq x \leq \vartheta + 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

a) Si scriva la likelihood per un campione bernoulliano di numerosità N tratto da tale distribuzione.

b) Si scriva l'equazione che definisce lo stimatore di massima verosimiglianza, ricordando che

$$\frac{d}{dt}|t| = Sign\ t = \begin{cases} +1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

c) Si dimostri che per un campione simmetrico rispetto ad un punto a, ad esempio x_1, x_2, x_3, x_4 come in figura,



lo stimatore di maximum likelihood è $\hat{\vartheta} = a = \dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{N} x_i$.

[**R:** $L(\underline{x}, \vartheta) = \exp\left\{\sum_i \log(1 - |x_i - \vartheta|)\right\}$;
$Sign(x_1 - \hat{\vartheta}) = Sign(x_2 - \hat{\vartheta}) = -1,\ Sign\ (x_3 - \hat{\vartheta}) = Sign(x_4 - \hat{\vartheta}) = 1$]

Esercizio 6.30

Data la funzione densità di probabilità

$$f_X(x; \vartheta) = \begin{cases} \frac{A}{2\pi}\vartheta^{-2} x e^{-x/\vartheta} & x \geq 0, \vartheta > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

a) determinare la costante A;

b) dati i seguenti valori di x_i $(i = 1, 2, \ldots, 10)$

2.53, 6.69, 13.05, 0.36, 5.86, 6.51, 16.29, 6.62, 14.4, 7.97

si stimi con il criterio della massima verosimiglianza il valore di ϑ e si dia l'espressione dello stimatore;

3) si verifichi se lo stimatore così trovato è corretto.

[**R:** $A = 2\pi$; $\hat{\vartheta} = \sum_i \frac{x_i}{2N}$; $\hat{\vartheta} = 4.014$]

Esercizio 6.31

Dato il campione bernoulliano tratto dalla variabile casuale con distribuzione di probabilità :

$$p_k = A(q)kq^{k-1} = A(q)\frac{d}{dq}q^k$$

a) Si determini $A(q)$.

b) Si dia la stima di massima verosimiglianza di q.

Nello svolgimento si osservi che:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

[**R:** $A(q) = (1-q)^2$; $\hat{q} = \dfrac{\sum_i k_i - N}{\sum_i k_i + N}$]

Esercizio 6.32

Considerate le funzioni densità di probabilità

$$p(x) = e^{-x}$$
$$q(x) = \frac{1}{3}e^{-x/3}$$

e la famiglia di densità dipendenti dal parametro α:

$$f_X(x, \alpha) = \alpha p(x) + (1-\alpha)q(x) ,$$

si determini la stima di α con il metodo della massima verosimiglianza, per un campione di numerosità 2 in cui i valori estratti siano:

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = \log 8$$

[**R:** $\hat{\alpha} = 1.75$]

Esercizio 6.33

Data la variabile statistica doppia (X, Y) con distribuzione normale bivariata:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[x^2 + y^2 - 2\rho xy\right]\right\}$$

a) Si costruisca la funzione di likelihood.

b) Si scriva l'equazione che permette di stimare ρ.

c) Nell'ipotesi $\rho \to 0$, trascurando nell'equazione precedente le potenze di ordine superiore in ρ, si determini $\hat{\rho}$.

[**R:** $L(\underline{x}, \underline{y}, \rho) = \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\sum_i x_i^2 + \sum_i y_i^2 - 2\rho \sum_i x_i y_i] - N \log 2\pi +$
$-\frac{N}{2}\log(1-\rho^2)\} \quad ; \quad \hat{\rho} = \dfrac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2 + \sum y_i^2 - N}$]

Esercizio 6.34

Si consideri la variabile lognormale $X : \log X = aZ$; supponendo di avere estratto da X un campione bernoulliano di numerosità N si dia:

a) l'espressione della likelihood, dicendo se appartiene o no alla famiglia esponenziale;

b) la stima di maximum likelihood del parametro a;

c) si dimostri che $\hat{a}^2$ è uno stimatore corretto di a^2;

d) si trovi il limite minimo di varianza per uno stimatore corretto di a^2.

[**R:** $L(\underline{x}; \vartheta) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \prod_i \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{\log^2 x_i}{a^2}}}{a x_i} \quad ; \quad \hat{a} = \sqrt{\frac{\sum_i \log^2 x_i}{N}}$;
$\sigma^2(\hat{a}^2) \geq \frac{a^2}{2N}$]

Esercizio 6.35

Una quantità μ è osservata successivamente in due modi diversi; con il primo tipo di osservazioni, X_{1i}, $i = 1, 2, \ldots, N_1$, si ha una varianza σ_1^2, mentre con il secondo tipo X_{2i}, $i = 1, 2, \ldots, N_2$, si ha una varianza σ_2^2. Le osservazioni sono tutte indipendenti e normalmente distribuite.

a) Si scriva la funzione di likelihood $L(x_{1i}, x_{2i}; \mu, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$.

b) Si scrivano le equazioni per la stima di maximum likelihood di $\mu, \sigma_1^2, \sigma_2^2$.

c) Posti $m_1 = \frac{1}{N_1}\sum_{i=1}^{N_1} x_{1i}$, $m_2 = \frac{1}{N_2}\sum_{i=1}^{N_2} x_{2i}$, $Q_1 = \frac{1}{N_1}\sum_{i=1}^{N_1} x_{1i}^2$, $Q_2 = \frac{1}{N_2}\sum_{i=1}^{N_2} x_{2i}^2$, si dimostri che se $m_1 = m_2 = m$ e $Q_1 = Q_2 = Q$ allora è anche

$$\hat{\mu} = m \quad , \quad \hat{\sigma}_1^2 = \hat{\sigma}_2^2 = Q - m^2 \ .$$

[**R:** $L(\underline{x}, \vartheta) = \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{N_1+N_2}{2}}} \cdot \dfrac{1}{\sigma_1^{N_1}} \cdot \dfrac{1}{\sigma_2^{N_2}} \cdot$
$\cdot \exp\left\{ -\dfrac{1}{2} \left[\dfrac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{N_1}(x_{1i} - \mu)^2 + \dfrac{1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{N_2}(x_{2i} - \mu)^2 \right] \right\}$]

Esercizio 6.36

Sia dato un campione bernoulliano di numerosità $N = 2$ e di distribuzione

$$f_X(x) = \frac{c}{b} e^{-(\frac{x-a}{b})^4}$$

a) Si scriva la funzione di verosimiglianza del campione.

b) Si dimostri che $\hat{a} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ è la stima di massima verosimiglianza di a e si trovi la stima di massima verosimiglianza di b.

[**R:** $\hat{b} = \{2[(x_1 - \hat{a})^4 + (x_2 - \hat{a})^4]\}^{1/4}$]

7 L' INFERENZA STATISTICA

Test sulla media di campioni numerosi

(a) Ipotesi semplice

• $H_0: \ \mu = \mu_0$ (con σ^2 nota).

La statistica naturale da scegliere per effettuare il test è una funzione della media campionaria $\mathcal{M} = \frac{1}{N}\sum_i X_i$.

Se il numero N è elevato si può applicare il teorema centrale della statistica, per cui si ha:

$$\mathcal{M} \sim \mathcal{N}[\mu, \frac{\sigma^2}{N}]$$

pertanto, se H_0 è vera, vale la relazione equivalente:

$$\frac{\mathcal{M} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \sim \mathcal{Z}$$

Quindi l'ipotesi H_0 è accettata (avendo fissato come statistica base del test: $S = |\mathcal{M} - \mu|$), al livello di significatività α, se:

$$\frac{\mathcal{M} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \leq \mathcal{Z}_{\frac{\alpha}{2}}$$

dove $\frac{\alpha}{2} = P(\mathcal{Z} \geq \mathcal{Z}_{\alpha/2})$.

(b) Differenza di medie, ipotesi semplice

• $H_0: \ \mu_X = \mu_Y$ (con σ_X^2, σ_Y^2 note, X ed Y indipendenti).

Si parte dalla statistica $S = \mathcal{M}_X - \mathcal{M}_Y$:

$$S = \frac{1}{N_X}\sum_{i=1}^{N_X} X_i - \frac{1}{N_Y}\sum_{j=1}^{N_Y} Y_j$$

Per $N_X \to \infty$, $N_Y \to \infty$ si applica il teorema centrale della statistica e, sotto l'ipotesi H_0, si ha:

$$(\mathcal{M}_X - \mathcal{M}_Y) \sim \mathcal{N}[0, \frac{\sigma_X^2}{N_X} + \frac{\sigma_Y^2}{N_Y}]$$

Questa relazione si scrive anche nella seguente forma equivalente:

$$\frac{\mathcal{M}_X - \mathcal{M}_Y}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{N_X} + \frac{\sigma_Y^2}{N_Y}}} \sim \mathcal{Z}$$

Pertanto l'ipotesi H_0 è accettata se:

$$\frac{|\mathcal{M}_X - \mathcal{M}_Y|}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{N_X} + \frac{\sigma_Y^2}{N_Y}}} \leq \mathcal{Z}_{\alpha/2}$$

dove $\frac{\alpha}{2} = P(\mathcal{Z} \geq \mathcal{Z}_{\alpha/2})$.

(c) Ipotesi composta

• $H_0 : \ \mu = \mu_0$ (con σ^2 incognita = parametro di disturbo)

Si usa come statistica:

$$\frac{\mathcal{M} - \mu}{\frac{\overline{S}}{\sqrt{N}}} \sim \mathcal{Z}$$

Quindi è un caso analogo al caso **(a)**, ma, ovviamente, si deve considerare la varianza campionaria corretta $\overline{S}^2 = \frac{1}{N-1}(\sum_i X_i - \mathcal{M})^2$; si osservi che questa statistica avrà un grado di approssimazione peggiore che nel caso di σ^2 nota.

(d) Differenza di medie, ipotesi composta

• $H_0 : \ \mu_X = \mu_Y$ (con σ_X^2, σ_Y^2 incognite)

Si usa come statistica:

$$\frac{\mathcal{M}_X - \mathcal{M}_Y}{\sqrt{\frac{\overline{S}_X^2}{N_X} + \frac{\overline{S}_Y^2}{N_Y}}} \sim \mathcal{Z}$$

Nei casi in cui si suppone $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ è opportuno dare un'unica stima di σ^2:

$$\overline{\mathcal{S}}^2 = \frac{N_X - 1}{N_X + N_Y - 2}\overline{\mathcal{S}}_X^2 + \frac{N_Y - 1}{N_X + N_Y - 2}\overline{\mathcal{S}}_Y^2$$

e quindi

$$\frac{\mathcal{M}_X - \mathcal{M}_Y}{\overline{\mathcal{S}}\sqrt{\frac{1}{N_X} + \frac{1}{N_Y}}} \sim \mathcal{Z}$$

Test di buon adattamento

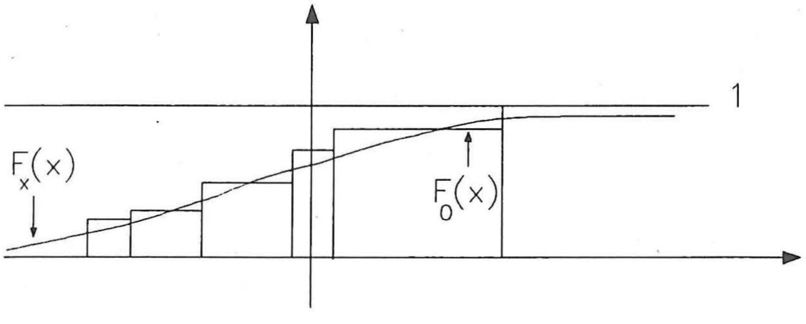
Consistono nel confronto tra una distribuzione campionaria ed una corrispondente distribuzione teorica, nota in base all'ipotesi H_0. Tale confronto può avvenire usando le funzioni di distribuzione o confrontando istogramma e funzione teorica di densità, "raggruppata" per classi.

(a) Test di Kolmogorov

Consiste nel confronto tra funzioni di distribuzione. La statistica usata è:

$$D = \mathrm{Sup}_X |F_0(x) - F_X(x)|$$

dove F_0 è la funzione di distribuzione empirica e F_X è quella relativa alla distribuzione ipotizzata.



(b) Test del χ^2

Consiste nel confronto tra istogramma empirico e "teorico". La statistica usata per il confronto è:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{(N_i - \nu_i)^2}{\nu_i} \sim \chi^2_{m-1}$$

dove m è il numero di intervalli dell'istogramma, N_i sono le frequenze assolute empiriche nell'intervallo i-esimo e ν_i sono le frequenze assolute teoriche corrispondenti.

In caso di ipotesi composta, con h parametri di disturbo (stimati), i gradi di libertà della distribuzione χ^2 sono $(m-1-h)$: χ^2_{m-1-h}.

Test per campioni normali

Se X ha una distribuzione normale ed $\underline{X}^{(N)}$ è una variabile campionaria bernoulliana, allora la media campionaria $\mathcal{M}$ e la varianza campionaria $\mathcal{S}^2$ sono variabili tra loro indipendenti.

Inoltre:

$$\mathcal{M} \sim \mathcal{N}[\mu, \frac{\sigma^2}{N}]$$

$$\mathcal{S}^2 \sim \frac{\sigma^2}{N} \chi^2_{(N-1)}$$

Si deriva inoltre che la varianza campionaria corretta è data da:

$$\overline{\mathcal{S}}^2 \sim \frac{\sigma^2}{N-1} \chi^2_{(N-1)}$$

(a) Medie di campioni normali

- $H_0: \quad \mu = \mu_0$

Si suppone che $X \sim \mathcal{N}[\mu, \sigma^2]$: σ^2 è un parametro di disturbo e quindi H_0 è da intendersi come ipotesi composta. Si ricordi la formula:

$$\frac{\sqrt{\nu}\mathcal{Z}}{\sqrt{\chi^2_\nu}} \sim t_\nu$$

Allora, poiché:

$$\frac{\mathcal{M}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \sim \mathcal{Z} \; ; \qquad \frac{\overline{\mathcal{S}}}{\sigma}\sqrt{N-1} \sim \sqrt{\chi^2_{(N-1)}}$$

si ha:

$$\frac{\mathcal{M}-\mu}{\frac{\overline{\mathcal{S}}}{\sqrt{N}}} \sim t_{(N-1)}$$

La statistica che si usa per il test è quindi:

$$S = \frac{|\mathcal{M}-\mu_0|}{\frac{\overline{\mathcal{S}}}{\sqrt{N}}}$$

che deve essere confrontata con una $t_{(N-1)}(\alpha/2)$.

- $H_0: \; \mu_X = \mu_Y$

La relazione che si utilizza è:

$$\frac{|\mathcal{M}_X - \mathcal{M}_Y|}{\overline{\mathcal{S}}\sqrt{\frac{1}{N_X}+\frac{1}{N_Y}}} \sim t_{(N_X+N_Y-2)}$$

con:

$$\overline{\mathcal{S}}^2 = \frac{N_X-1}{N_X+N_Y-2}\overline{\mathcal{S}}^2_X + \frac{N_Y-1}{N_X+N_Y-2}\overline{\mathcal{S}}^2_Y$$

(b) Varianza di campioni normali

- $H_0: \; \sigma^2 = \sigma_0^2$

Si sa che:

$$\overline{\mathcal{S}}^2 \sim \frac{\sigma^2}{N-1}\chi^2_{(N-1)}$$

pertanto:

$$\frac{\overline{\mathcal{S}}^2}{\sigma^2}(N-1) \sim \chi^2_{(N-1)}$$

- $H_0: \; \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

Si ricordi la formula:

$$\frac{\chi^2_\lambda/\lambda}{\chi^2_\nu/\nu} \sim F_{(\lambda,\nu)}$$

Allora:

$$\frac{\overline{S}^2_X}{\overline{S}^2_Y}\frac{\sigma^2_Y}{\sigma^2_X} \sim \frac{\overline{S}^2_X}{\overline{S}^2_Y} = F_{(N_X-1,N_Y-1)}$$

- $H_0: \ \sigma^2_Y = C\sigma^2_X$

$$\frac{\overline{S}^2_X}{\overline{S}^2_Y}\frac{\sigma^2_Y}{\sigma^2_X} = \frac{\overline{S}^2_X}{\overline{S^2}_Y}C \sim F_{(N_X-1,N_Y-1)}$$

(c) Coefficiente di correlazione lineare

E' un tipo di test che ha senso statistico solo per campioni che hanno una certa numerosità.

- $H_0: \ \rho = 0$ (test di indipendenza stocastica di X da Y)

$$\frac{R}{\sqrt{1-R^2}}\sqrt{N-2} \sim t_{(N-2)}$$

- $H_0: \ \rho = \rho_0$

$$\frac{\sqrt{N-3}}{2}\log\frac{1+R}{1-R}\cdot\frac{1-\rho_0}{1+\rho_0} \sim \mathcal{Z}$$

Test non parametrici

Quando non si conosce la distribuzione della variabile casuale X da cui sono estratti i dati che formano il campione, si applicano tecniche statistiche che non richiedono tale conoscenza: sono i metodi "non parametrici" o "distribution-free", utili quando:

- non si può ragionevolmente presumere che la popolazione sia distribuita in modo normale;

- i campioni sono piccoli (i test classici assumono che i campioni siano ragionevolmente grandi).

Test di indipendenza H_0 : I campioni X e Y sono indipendenti.
Si considerano le coppie di valori (X, Y) (N = numerosità delle coppie) come estratte da una variabile statistica a due dimensioni; tali coppie vengono ordinate in una tabella doppia, suddivisa in n classi per quanto riguarda i valori X e m classi per quanto riguarda i valori Y. Dette: $F_{i,j}$ le frequenze assolute delle coppie risultanti dalla tabella, P_i, Q_j le frequenze assolute delle marginali X e Y, si utilizza per la verifica d'ipotesi la formula:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{(F_{ij}N - P_iQ_j)^2}{P_iQ_j} \sim \chi^2_{(n-1)(m-1)}$$

Test di Mann-Whitney $H_0 : \mu_X = \mu_Y$
Si confrontano le medie di due campioni X e Y indipendenti.
I dati dei campioni (considerati come un'unica serie) vengono sostituiti dai corrispondenti ranghi, i cui valori vanno da 1 per il dato di valore minimo a $(N_X + N_Y)$ per il dato di valore massimo. La verifica viene poi eseguita utilizzando uno solo dei due campioni dei ranghi. Ad esempio, detta R_X la somma dei ranghi del campione X, la formula utilizzata è la seguente:

$$\frac{R_X - \dfrac{N_X(N_X + N_Y + 1)}{2}}{\sqrt{\dfrac{N_X N_Y(N_X + N_Y + 1)}{12}}} \sim \mathcal{Z}$$

Test di Siegel-Tuckey $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$
Si confrontano le varianze di due campioni X e Y indipendenti.
I dati dei campioni (considerati come un'unica serie) vengono sostituiti dai corrispondenti ranghi, i cui valori vanno assegnati nel modo seguente:

Valore del dato	Rango
Dato più piccolo	1
2° dato più piccolo	4
3° dato più piccolo	5
4° dato più piccolo	8
$\vdots$	$\vdots$
4° dato più grande	7
3° dato più grande	6
2° dato più grande	3
Dato più grande	2

Anche per questo test, la verifica viene poi eseguita su uno solo dei due campioni dei ranghi e la formula utilizzata è ancora:

$$\frac{R_X - \dfrac{N_X(N_X + N_Y + 1)}{2}}{\sqrt{\dfrac{N_X N_Y(N_X + N_Y + 1)}{12}}} \sim \mathcal{Z}$$

Test del segno per la media $\quad H_0 : \mu_X = \mu_Y$

Si esegue tipicamente nel caso dei cosiddetti studi "prima e dopo", quando si misura lo stesso campione due volte, ottenendo in tale modo due campioni X (valore misurato "prima") e Y (valore misurato "dopo") che non sono indipendenti. Per ogni coppia di valori si determina il segno ($+$ o $-$) secondo la regola:

Valore "prima"		Valore "dopo"	Segno
X	$>$	Y	$-$
X	$<$	Y	$+$
X	$=$	Y	nessuno

Detti poi: N_p = numero dei segni "più", N_m = numero dei segni "meno", $N_{tot} = N_p + N_m$ = numero totale dei segni, si calcola $p = \frac{N_p}{N_{tot}}$ = proporzione dei segni "più" sul totale dei segni e si utilizza per la verifica la seguente formula:

$$\frac{p - 0.5}{\dfrac{0.5}{\sqrt{N_{tot}}}} \sim \mathcal{Z}$$

Test del segno per la varianza $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

Di nuovo, si esegue questo tipo di verifica quando si misura lo stesso campione due volte, ottenendo i due campioni X (valore misurato "prima") e Y (valore misurato "dopo") che non sono indipendenti. In questo caso però vengono confrontati i moduli degli scarti rispetto alla media del campione X con i moduli degli scarti rispetto alla media del campione Y:

Scarto "prima"		Scarto "dopo"	Segno
$\lvert X - \mathcal{M}_X \rvert$	$>$	$\lvert Y - \mathcal{M}_Y \rvert$	$-$
$\lvert X - \mathcal{M}_X \rvert$	$<$	$\lvert Y - \mathcal{M}_Y \rvert$	$+$
$\lvert X - \mathcal{M}_X \rvert$	$=$	$\lvert Y - \mathcal{M}_Y \rvert$	nessuno

Per la verifica si usa ancora la formula:

$$\frac{p - 0.5}{\frac{0.5}{\sqrt{N_{tot}}}} \sim \mathcal{Z}$$

Problemi risolti

Esercizio 7.1

Si vuole condurre un sondaggio per conoscere la risposta di una popolazione molto numerosa ad una certa proposta e, a tale scopo, si interpella un campione della popolazione. Si assume che il campione rispecchi gli orientamenti della popolazione e che tutti dicano la verità.

Si vuole che un risultato del sondaggio in cui

$$\frac{N_{\mathrm{SI}}}{N} > 0.52$$

(percentuale dei SI maggiore del 52%) consenta di ipotizzare un orientamento favorevole della maggioranza

$$(N_{\mathrm{SI}})_{\mathrm{totale}} > 50\%$$

con un'attendibilità pari al 99%.

Determinare la numerosità minima del campione. Si assuma che la distribuzione di probabilità della percentuale dei SI sia approssimabile con una distribuzione normale e si effettui un test ad una coda.

Svolgimento
Si ricordi che il livello di significatività α del test è il rischio di rifiutare una certa ipotesi nel caso in cui essa è vera. In questo esercizio α è il rischio di escludere un orientamento favorevole della maggioranza nel caso in cui questo orientamento si verifichi; in altre parole $\alpha = 1\%$.

Si consideri la variabile aleatoria X che assume i valori

$$\begin{cases} \mathrm{SI} \rightarrow 1 & P(\mathrm{SI}) = p = \frac{1}{2} \\ \mathrm{NO} \rightarrow 0 & P(\mathrm{NO}) = q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

X ha media $\mu_X = p$ e varianza $\sigma_X^2 = pq$.

Quando si considerano n estrazioni di questa variabile aleatoria si ottiene, come è ben noto, una distribuzione binomiale; sia K la variabile aleatoria discreta che descrive la "probabilità che, su n ripetizioni, k

diano come risultato 1 e $(n-k)$ diano come risultato 0", la sua distribuzione risulta essere:

$$P(n,k) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k q^{n-k}, \quad \text{con } \mu_K = np, \ \sigma_K^2 = npq$$

La quantità N_{SI}/N è una media campionaria per la variabile aleatoria X :

$$\mathcal{M} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i = \frac{N_{\mathrm{SI}}}{N}$$

La media campionaria $\mathcal{M}$ è uno stimatore **corretto** $(E\{\mathcal{M}\} = E\{X\})$ e **consistente** $(\sigma^2\{\mathcal{M}\} = \frac{\sigma_X^2}{N})$ della media teorica μ_X. In questo caso quindi:

$$E\{\frac{N_i}{N}\} = E\{X\} = p = \frac{1}{2}$$

$$\sigma^2\{\frac{N_i}{N}\} = \frac{\sigma_X^2}{N} = \frac{pq}{N} = \frac{1}{4N}$$

Vale il seguente teorema: se $\{X_i\}$ è una successione di variabili indipendenti, tutte con la stessa distribuzione e con

$$E\{X_i\} = \mu$$
$$\sigma^2\{X_i\} = \sigma^2$$

allora per la successione $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ vale

$$S_n \sim \mathcal{N}[n\mu, n\sigma^2]$$

ovvero

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim \mathcal{N}[0,1]$$

qualunque sia la distribuzione delle variabili X_i.

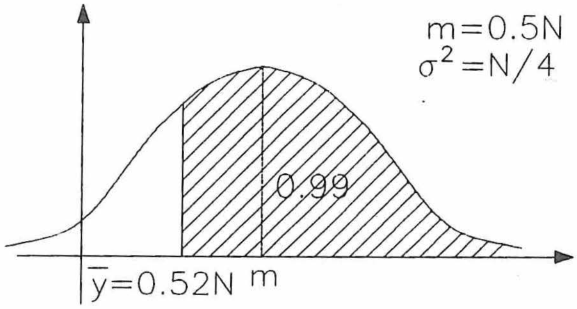
Quindi, in questo caso, la variabile aleatoria Y, che conta il numero dei SI nel sondaggio, ha la seguente densità di probabilità

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(y-Np)^2}{Npq}}$$

Si osservi che il sondaggio è una stima; per stimare, basandosi su un campione, che una certa percentuale della popolazione si esprima per il SI, basta semplicemente contare. Se invece si vuole misurare l'attendibilità del sondaggio, è necessario conoscere la distribuzione di probabilità della variabile Y; data $f(y)$ è quindi possibile calcolare la probabilità di quel risultato (almeno il 52% è per il SI) del sondaggio.

Fatta questa osservazione si determina il valore di N per cui vale:

$$P(Y \geq \overline{y} = 0.52N) = 0.99$$



$$P(Y \geq 0.52N) = P(Z \geq \overline{z}) = 0.99$$

Standardizzando:

$$\overline{z} = \frac{\overline{y} - m}{\sigma} = \frac{\overline{y} - 0.5N}{\sqrt{\frac{N}{4}}} = \frac{2(\overline{y} - 0.5N)}{\sqrt{N}}$$

Interpolando opportunamente si ottiene

$$\overline{z} = 2.3263$$

da cui, risolvendo:

$$N = 3382.2$$

quindi serve un campione di numerosità $N > 3383$.

Esercizio 7.2

Si considerino le tre serie, di 50 numeri l'una, riportate nella seguente tabella:

	0	1	2		0	1	2
00	−0.179	−0.399	−0.235	25	−0.927	+0.838	−1.546
01	+0.421	+1.454	+0.904	26	+1.232	+2.170	+0.088
02	+0.210	−0.556	+0.465	27	+0.935	+0.665	+2.034
03	−1.598	+0.019	−0.266	28	−1.739	−0.622	−1.563
04	+1.717	+1.514	−0.012	29	+0.990	−1.483	+0.154
05	−0.308	+0.867	−0.372	30	−0.189	−0.240	+0.133
06	−0.421	+0.516	−0.038	31	+1.866	−1.398	+0.068
07	−0.776	+0.874	−1.265	32	−0.018	+0.628	+0.230
08	+0.640	−0.522	+0.023	33	−0.646	−0.350	+0.324
09	−0.319	+0.889	+1.180	34	−1.150	−0.220	−0.533
10	+0.610	−0.383	+1.812	35	+0.103	−0.361	+1.024
11	−0.174	−0.154	+0.098	36	+1.243	+0.539	+0.684
12	+2.576	−0.684	−1.200	37	−0.093	−1.190	+0.580
13	−1.103	+1.398	−0.653	38	−0.261	−0.194	+0.303
14	+1.635	+0.448	−1.530	39	−0.230	−0.550	+0.266
15	−0.068	−0.860	−0.194	40	−0.148	+0.504	−0.028
16	−1.960	+1.076	−0.671	41	+1.122	+0.896	−0.789
17	+0.443	−0.912	+0.251	42	+0.499	−1.032	+0.159
18	+1.360	+0.533	+1.094	43	+0.678	−0.782	+0.470
19	+0.810	+0.319	−1.514	44	−1.347	+3.090	−0.896
20	+0.616	+1.347	−1.866	45	−1.094	−0.610	−0.287
21	−0.598	−2.366	−0.831	46	−0.088	−0.889	+0.803
22	+0.426	+1.580	−1.112	47	+0.093	−0.476	+1.265
23	+0.831	−0.516	−1.717	48	−0.950	−0.008	+0.012
24	−0.640	−0.128	+1.276	49	−0.329	−0.138	−0.504

a) Supponendo che ciascuna serie sia un'estrazione da una $\mathcal{N}[\mu, 1]$, sottoporre a verifica l'ipotesi $H_0 : \mu = 0$ nei tre casi, ad un livello di significatività $\alpha = 5\%$.

b) Supponendo ora di non conoscere σ^2, cioè che ciascuna serie sia un'estrazione da una $\mathcal{N}[\mu, \sigma^2]$, sottoporre a verifica l'ipotesi $H_0 : \mu = 0$ nei tre casi, con lo stesso livello di significatività.

c) Usando il test del χ^2, verificare il buon adattamento di ciascuna serie ad una distribuzione normale standardizzata e ad una $\mathcal{N}[\mu, \sigma^2]$, sempre con lo stesso livello di significatività.

Svolgimento

a) I tre campioni possono essere considerati campioni numerosi.
Perchè H_0 sia accettata deve essere:

$$\frac{|\mathcal{M} - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \leq \mathcal{Z}_{\alpha/2} \quad \text{con } \mathcal{Z}_{0.025} = 1.96 \quad \text{(dalla tabella)}$$

Per la SERIE 0: $m_0 = 0.074060$

$$\frac{|0.074060 - 0|}{\frac{1}{\sqrt{50}}} = 0.5237 < 1.96 \quad H_0 \text{ è accettata}$$

Per la SERIE 1: $m_1 = 0.082820$

$$\frac{|0.082820 - 0|}{\frac{1}{\sqrt{50}}} = 0.5856 < 1.96 \quad H_0 \text{ è accettata}$$

Per la SERIE 2: $m_2 = -0.078440$

$$\frac{|-0.078440 - 0|}{\frac{1}{\sqrt{50}}} = 0.5547 < 1.96 \quad H_0 \text{ è accettata}$$

b) In questo caso per accettare H_0 si deve verificare

$$\frac{\mathcal{M} - \mu_0}{\frac{\overline{S}}{\sqrt{N}}} \leq \mathcal{Z}_{\alpha/2} = 1.96$$

Per la SERIE 0: $m_0 = 0.074060$, $\overline{s}_0^2 = 0.951774$

$$\frac{|0.07406 - 0|}{\frac{0.975589}{\sqrt{50}}} = 0.5368 < 1.96 \quad H_0 \text{ è accettata}$$

Per la SERIE 1: $m_0 = 0.082820$, $\overline{s}_1^2 = 1.027753$

$$\frac{|0.08282 - 0|}{\frac{1.013782}{\sqrt{50}}} = 0.5777 < 1.96 \quad H_0 \text{ è accettata}$$

Per la SERIE 2: $m_2 = -0.078440$, $\bar{s}_2^2 = 0.841748$

$$\frac{|-0.07844 - 0|}{\frac{0.917468}{\sqrt{50}}} = 0.6045 < 1.96 \quad H_0 \text{ è accettata}$$

c) Il test del χ^2 consiste nel confronto tra una distribuzione campionaria e la corrispondente distribuzione teorica, nota in base all'ipotesi H_0. La statistica usata per il confronto è

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{(N_i - \nu_i)^2}{\nu_i} \sim \chi^2_{(m-1)}$$

dove:

m = numero di intervalli considerati

N_i = frequenze assolute empiriche

ν_i = frequenze assolute teoriche

Per il calcolo delle frequenze, si suddivide ciascun campione, ad esempio, in sette intervalli; la frequenza teorica è data da $\nu_i = Np_i = 50p_i$, dove p_i è la probabilità teorica che ha un valore del campione di appartenere all'i-esimo intervallo.

Intervallo	Freq.ass. SERIE 0 $N_i^{(0)}$	Freq.ass. SERIE 1 $N_i^{(1)}$	Freq.ass. SERIE 2 $N_i^{(2)}$	Freq.ass. teoriche ν_i
$-\infty \quad -1.5$	3	1	6	3.340
$-1.5 \quad -0.9$	6	5	3	5.865
$-0.9 \quad -0.3$	8	15	8	9.900
$-0.3 \quad +0.3$	13	8	18	11.790
$+0.3 \quad +0.9$	10	13	7	9.900
$+0.9 \quad +1.5$	6	4	6	5.865
$+1.5 \quad +\infty$	4	4	2	3.340

Si ha che:

$$\sum_{i=1}^{7} \frac{(N_i - \nu_i)^2}{\nu_i} \sim \chi^2_{(7-1)}$$

H_0 è accettata se:

$$\chi^2_{0.025} \leq \chi^2_{(6)} \leq \chi^2_{0.975}$$

$$1.24 \leq \chi^2_{(6)} \leq 14.4$$

SERIE 0:

$$\sum_{i=1}^{7} \frac{(N_i^{(0)} - \nu_i)^2}{\nu_i} = 0.6611 = \chi^2_{(6)}$$

H_0 è rifiutata.

SERIE 1:

$$\sum_{i=1}^{7} \frac{(N_i^{(1)} - \nu_i)^2}{\nu_i} = 7.3086 = \chi^2_{(6)}$$

H_0 è accettata.

SERIE 2:

$$\sum_{i=1}^{7} \frac{(N_i^{(2)} - \nu_i)^2}{\nu_i} = 8.5437 = \chi^2_{(6)}$$

H_0 è accettata.

Per verificare l'adattamento ad una distribuzione normale con media e varianza incognite, si devono stimare μ e σ^2 per ciascuna serie. In questo caso μ e σ^2 sono due parametri di disturbo e i gradi di libertà del χ^2 sono $(m - 1 - h) = 7 - 1 - 2 = 4$.

Le stime di μ e σ^2 sono date da:

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{50} x_i$$

$$\overline{s}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{50} (x_i - m)^2$$

$$
\begin{array}{ll}
m_0 = 0.074060 & \bar{s}_0^2 = 0.950774 \\
m_1 = 0.082820 & \bar{s}_1^2 = 1.027753 \\
m_2 = -0.078440 & \bar{s}_2^2 = 0.841748
\end{array}
$$

Per trovare le frequenze assolute teoriche si devono standardizzare gli estremi di ogni classe, per ogni campione: $\mathcal{Z} = \frac{X-\mathcal{M}}{\sqrt{\bar{s}^2}}$:

SERIE 0:

Estremi classi	Estremi standardizzati	$N_i^{(0)}$	$\nu_i = Np_i$
$-\infty \quad -1.5$	$-\infty \quad -1.614$	3	2.685
$-1.5 \quad -0.9$	$-1.614 \quad -0.999$	6	5.250
$-0.9 \quad -0.3$	$-0.999 \quad -0.384$	8	9.665
$-0.3 \quad +0.3$	$-0.384 \quad +0.232$	13	11.950
$+0.3 \quad +0.9$	$+0.232 \quad +0.847$	10	10.565
$+0.9 \quad +1.5$	$+0.847 \quad +1.462$	6	6.280
$+1.5 \quad +\infty$	$+1.462 \quad +\infty$	4	3.605

$$\sum_{i=1}^{7} \frac{(N_i^{(0)} - \nu_i)^2}{\nu_i} = \chi^2_{(4)} = 0.6092$$

$\chi^2_{0.025}$ a 4 gradi di libertà = 0.484

$\chi^2_{0.975}$ a 4 gradi di libertà = 11.100

poiché $0.484 < \chi^2_{(4)} < 11.1$, H_0 è accettata.

SERIE 1:

Estremi classi	Estremi standardizzati	$N_i^{(1)}$	$\nu_i = Np_i$
$-\infty \quad -1.5$	$-\infty \quad -1.561$	1	2.970
$-1.5 \quad -0.9$	$-1.561 \quad -0.969$	5	5.330
$-0.9 \quad -0.3$	$-0.969 \quad -0.378$	15	9.300
$-0.3 \quad +0.3$	$-0.378 \quad +0.214$	8	11.560
$+0.3 \quad +0.9$	$+0.214 \quad +0.806$	13	10.390
$+0.9 \quad +1.5$	$+0.806 \quad +1.398$	4	6.410
$+1.5 \quad +\infty$	$+1.398 \quad +\infty$	4	4.040

$$\sum_{i=1}^{7} \frac{(N_i^{(1)} - \nu_i)^2}{\nu_i} = \chi^2_{(4)} = 7.4791$$

H_0 è accettata.

SERIE 2:

Estremi classi		Estremi standardizzati		$N_i^{(0)}$	$\nu_i = Np_i$
$-\infty$	-1.5	$-\infty$	-1.549	6	3.030
-1.5	-0.9	-1.549	-0.895	3	6.175
-0.9	-0.3	-0.895	-0.241	8	11.055
-0.3	$+0.3$	-0.241	$+0.412$	18	12.965
$+0.3$	$+0.9$	$+0.412$	$+1.066$	7	9.930
$+0.9$	$+1.5$	$+1.066$	$+1.720$	6	4.980
$+1.5$	$+\infty$	$+1.720$	$+\infty$	2	2.135

$$\sum_{i=1}^{7} \frac{(N_i^{(2)} - \nu_i)^2}{\nu_i} = \chi^2_{(4)} = 8.6868$$

H_0 è accettata.

Esercizio 7.3

Si consideri il campione:

3.861, 1.048, 1.418, 3.639, 2.038, 3.249, 1.526, 5.011, 5.467, 1.004

e si sottoponga a verifica l'ipotesi che esso sia tratto da una variabile χ^2 a 2 gradi di libertà, applicando un test di Kolmogorov con $\alpha = 5\%$.

Si ripeta l'esercizio applicando un test del χ^2 con lo stesso livello di significatività.

Svolgimento

Per eseguire un test di Kolmogorov, occorre costruire per il campione l'istogramma delle frequenze cumulate considerando cinque intervalli di uguale ampiezza pari a

$$a = \frac{x_{max} - x_{min}}{5} = 0.8926$$

Gli estremi delle classi e le frequenze relative semplici e cumulate sono date da:

Classe	Freq.rel. semplici	Freq.rel. cumulate $F_0(\xi)$
1.0040 - 1.8966	0.4	0.4
1.8966 - 2.7892	0.1	0.5
2.7892 - 3.6818	0.2	0.7
3.6818 - 4.5744	0.1	0.8
4.5744 - 5.4670	0.2	1.0

La funzione densità di probabilità per una variabile χ^2 a ν gradi di libertà è data da:

$$f(\chi^2_\nu) = \frac{1}{2e^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})} e^{(-\frac{\chi^2}{2})}(\chi^2)e^{(\frac{\nu}{2}-1)}$$

Per ν=2

$$f(\chi^2_2) = \frac{1}{2}e^{-\frac{\chi^2}{2}}$$

Quindi se la variabile casuale X è distribuita come una χ^2 a 2 gradi di libertà, essa ha funzione densità di probabilità:

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \qquad x \geq 0$$

La funzione di distribuzione di X è data da:

$$F_\xi(\xi) = \int_0^\xi f(x)dx = \int_0^\xi \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx = 1 - e^{-\frac{\xi}{2}}$$

Si deve considerare ora il valore assunto dalla $F_\xi(\xi)$ nei punti di salto della $F_0(\xi)$:

ξ	$F_0(\xi)$	$F_\xi(\xi)$	$\lvert F_0(\xi) - F_\xi(\xi)\rvert$
1.0040	0.0	0.394681	0.394681
1.8966	0.4	0.612601	0.212601
2.7892	0.5	0.752068	0.252068
3.6818	0.7	0.841325	0.141325
4.5744	0.8	0.898450	0.098450
5.4670	1.0	0.935009	0.064991

Infine, si utilizza la statistica:

$$D = Sup_{(\xi)}|F_0(\xi) - F_\xi(\xi)| = 0.394681$$

Tale valore è da confrontare con il valore teorico D ottenuto dalle tabelle di Kolmogorov-Smirnov per $N = 10$ e $\alpha = 5\%$. Poiché $D_{10,.95} = 0.409$ e

$$Sup_{(\xi)}|F_0(\xi) - F_\xi(\xi)| \leq D_{10,.95}$$

vale l'ipotesi fatta, cioé il campione può essere supposto estratto da una χ^2 a due gradi di libertà.

Invece per effettuare il test del χ^2 è necessario calcolare le probabilità relative alla distribuzione χ^2 nei differenti intervalli:

$$\begin{aligned}
p_1 &= F_\xi(1.8966) - F_\xi(1.0040) = 0.21792\\
p_2 &= F_\xi(2.7892) - F_\xi(1.8966) = 0.139467\\
p_3 &= F_\xi(3.6818) - F_\xi(2.7892) = 0.089257\\
p_4 &= F_\xi(4.5744) - F_\xi(3.6818) = 0.057125\\
p_5 &= F_\xi(5.4670) - F_\xi(4.5744) = 0.036559
\end{aligned}$$

Confronto tra le frequenze assolute empiriche e teoriche:

Classe	N_i(empirico)	ν_i(teorico)
1	4	2.17920
2	1	1.39467
3	2	0.89257
4	1	0.57125
5	2	0.36559

$$\chi^2_{(oss)} = \sum_{i=1}^{5} \frac{(N_i - \nu_i)^2}{\nu_i} = 10.635646$$

$$\chi^2_{0.025}(4\ g.d.l.) = 0.484 \qquad \chi^2_{0.975}(4\ g.d.l.) = 11.1$$

H_0 è accettata.

Esercizio 7.4

Si ipotizza che una certa quantità, i cui valori si sa essere compresi tra -3 e -3, sia distribuita uniformemente in tale intervallo. Per verificare tale ipotesi si applica un test del χ^2 (ad una coda con un livello di significatività $\alpha = 10\%$) suddividendo l'intervallo $[-3, 3]$ in sei parti uguali.

a) Si determini l'esito del test nei seguenti due casi:

$$N = 600 \qquad N_i : \quad 118,\ 88,\ 92,\ 94,\ 102,\ 106$$
$$N = 6000 \qquad N_i : \quad 1180,\ 880,\ 920,\ 940,\ 1020,\ 1060$$

b) Variando N e mantenendo fissi i rapporti $\frac{N_i}{N}$ corrispondenti ai dati forniti, si determini il massimo valore di N che consente l'accettazione dell'ipotesi.

Svolgimento

a)

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{(N_i - \nu_i)^2}{\nu_i} \sim \chi^2_{(m-1)} \qquad m = \text{numero intervalli} = 6$$

Intervallo	N_i	ν_i	N_i	ν_i
I_1	118	100	1180	1000
I_2	88	100	880	1000
I_3	92	100	920	1000
I_4	94	100	940	1000
I_5	102	100	1020	1000
I_6	106	100	1060	1000
N_{tot}	600	600	6000	6000

$$\chi^2_{(5)}(\alpha = 0.90) = 9.24$$

$$N = 600: \quad \sum_{i=1}^{6} \frac{(N_i - \nu_i)^2}{\nu_i} = \frac{608}{100} = 6.08 \quad H_0 \text{ è accettata}$$

$$N = 6000: \quad \sum_{i=1}^{6} \frac{(N_i - \nu_i)^2}{\nu_i} = \frac{60800}{1000} = 60.8 \quad H_0 \text{ è rifiutata}$$

b)

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{(N_i - \nu_i)^2}{\nu_i} = \sum_{i=1}^{6} \left(\frac{N_i^2}{\nu_i} + \nu_i - 2N_i \right) =$$
$$= N \left[6 \sum_{i=1}^{6} \left(\frac{N_i}{N} \right)^2 - 1 \right] \sim \chi^2_{(5)}(0.90) = 9.24$$

$$N \left[6 \sum_{i} \left(\frac{N_i}{N} \right)^2 - 1 \right] = 0.01013\overline{3}N \leq 9.24$$

$$N \leq 911.8420$$

Esercizio 7.5

Nel controllo di un manufatto si intende usare un distanziometro che fornisce misure con uno scarto quadratico medio pari a 0.2 millimetri. Posto che si voglia stimare la distanza con un intervallo fiduciario di significatività $\alpha = 1\%$ e semiampiezza minore o uguale a 0.1 mm, quante misure indipendenti è necessario eseguire per raggiungere tale risultato?

Svolgimento
Posti

$$\begin{aligned} D &= \text{distanza da misurare} \\ m_0 &= \text{valore empirico della distanza} = \\ &= \text{valore medio di un campione normale} \\ & \text{di numerosità } N \end{aligned}$$

deve essere:

$$|D - m_0| = 0.1\text{mm}$$

$$\frac{|D - m_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \leq \mathcal{Z}_{\alpha/2}$$

con: $\sigma = 2$ mm, N incognita, $\mathcal{Z}_{\alpha/2} = \mathcal{Z}_{0.005} = 2.575$.

L'intervallo fiduciario è dato da:

$$D - \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\mathcal{Z}_{\alpha/2} \leq m_0 \leq D + \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\mathcal{Z}_{\alpha/2}$$

$$D - \Delta \leq m_0 \leq D + \Delta$$

Quindi deve essere:

$$\Delta = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\mathcal{Z}_{\alpha/2} \leq 0.1\text{mm}$$

$$\sqrt{N} \geq \frac{0.2}{0.1}\mathcal{Z}_{\alpha/2}$$

$$N \geq 26.5225$$

Perciò è necessario eseguire almeno 27 misure indipendenti per conseguire il risultato voluto.

Esercizio 7.6

Si considerino N lanci di una moneta, che si ipotizza essere bilanciata ($H_0 : \quad p_0 = 0.5$).

a) Si sottoponga a verifica l'ipotesi H_0 a livello almeno del 5%, supponendo di aver lanciato la moneta 10 volte, 20 volte, 30 volte e di aver ottenuto nell'ordine 3 teste, 6 teste, 9 teste:

Caso	N	k
1	10	3
2	20	6
3	30	9

Si calcolino nei tre casi i livelli di significatività osservati $\alpha_0 = P\{S > s_0\}$ rispetto alla statistica

$$S = |\sum X_i - Np_0|$$

b) Nel caso di 30 lanci (con il risultato di 9 teste), si sottoponga a verifica l'ipotesi H_0 : $p_0 = 0.5$, considerando questo come un campione numeroso, per $\alpha = 5\%$.

Svolgimento

a) ipotesi $H_0: \; p_0 = 0.5$

caso 1:

Si utilizza la statistica

$$S = |\sum X_i - Np_0| = |K - 5|$$

dove K è la variabile casuale che descrive il numero di eventi favorevoli $k = \sum_i x_i$ (cioé il numero di teste ottenute nell'esperimento).
S rappresenta quindi la differenza fra "eventi favorevoli empirici" ed il corrispondente valore teorico: $S = |\Delta|$.
Perché H_0 sia accettata deve essere $P\{S \leq s_0\} \leq 0.95$ in modo che $\alpha \geq 0.05$.

Si calcola la probabilità che la differenza fra valore osservato e valore teorico corrispondente sia minore o uguale a 3, cioé:

$$s_0 = |3 - 5| = 2 \; .$$

L'ipotesi è accettata se: $P\{S \leq s_0\} \leq 0.95$, cioé $P\{S \leq 3\} \leq 0.95$. Si ha:

$$\begin{aligned} P\{S \leq 3\} &= P\{|k-5| \leq 3\} = \\ &= P\{k=2\} + P\{k=3\} + \ldots + P\{k=8\} = \\ &= 0.8907 + \left[\binom{10}{2} + \binom{10}{8}\right] 0.5^{10} = \\ &= 0.9786 \end{aligned}$$

tale valore è maggiore di 0.95, quindi H_0 è rifiutata.
Il livello di significatività α_0 è (per definizione):

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= P\{S > s_0\} = P\{S > 2\} = P\{|k-5| > 2\} = \\ &= 1 - P\{|k-5| \leq 2\} = 1 - 0.8907 = 0.1093 = 10.93\% \end{aligned}$$

caso 2:

$$s_0 = |6 - 10| = 4$$

L'ipotesi H_0 è accettata se $P\{S \leq s_0\} \leq 0.95$, cioé $P\{S \leq 4\} \leq 0.95$.

$$\begin{aligned} P\{S \leq 4\} &= P\{|k-10| \leq 4\} = \\ &= P\{k=6\} + P\{k=7\} + \ldots + P\{k=14\} = \\ &= 0.9585 > 0.95 \end{aligned}$$

Quindi H_0 è rifiutata. Il livello di significatività in questo caso è dato da:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= P\{S > 4\} = P\{|k-10| > 4\} = 1 - P\{|k-10| > 4\} = \\ &= 0.0414 = 4.14\% \end{aligned}$$

caso 3:

$$s_0 = |9 - 15| = 6$$

L'ipotesi H_0 è accettata se $P\{S \leq s_0\} \leq 0.95$, cioé $P\{S \leq 6\} \leq 0.95$.

$$\begin{aligned} P\{S \leq 6\} &= P\{|k-15| \leq 6\} = \\ &= P\{k=9\} + P\{k=10\} \ldots P\{k=21\} = \\ &= 0.9839 > 0.95 \end{aligned}$$

Quindi H_0 è rifiutata. Il livello di significatività in questo caso è dato da:

$$\alpha_0 = 1 - 0.9839 = 0.0161 = 1.61\%$$

b) Per risolvere il secondo punto dell'esercizio si osservi che $p = E\{X\}$, così che $\mathcal{M} = \frac{1}{N}\sum X_i$ è uno stimatore di p; quanto alla varianza di $\mathcal{M}$, essa è data da:

$$\sigma^2(\mathcal{M}) = \frac{\sigma^2(X)}{N} = \frac{pq}{N}\ .$$

Pertanto sotto l'ipotesi H_0, si ha

$$\mathcal{M} \sim \mathcal{N}[p_0, \frac{p_0 q_0}{N}] \text{ ovvero } \frac{\mathcal{M} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{N}}} \sim \mathcal{Z}.$$

In questo caso
$H_0: \ p_o = 0.5$, $N = 30$, $k = \sum_i x_i = 9$

Per $\alpha = 5\%$ si ha $\mathcal{Z}_{\alpha/2} = \mathcal{Z}_{0.025} = 1.96$

$$m = \frac{1}{N}\sum_i x_i = 0.3$$

$$\sigma^2(\mathcal{M}) = \frac{\sigma^2(X)}{N} = \frac{p_0 q_0}{N} = 0.0083$$

$$\frac{|m - p_0|}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{N}}} = \mathcal{Z}_0 = 2.1909 > 1.96$$

Quindi l'ipotesi è rifiutata.

Esercizio 7.7
Dato il campione normale estratto dalla variabile aleatoria X:

0.889, -0.383, -0.154, -0.684, 1.398, 0.448, -0.860, 1.076, -0.912, 0.533

si sottoponga a test l'ipotesi $H_0: \ \mu = 0$ al livello di significatività dell'1%. Si confronti il risultato con quello che si otterrebbe usando la teoria dei campioni numerosi.

Si consideri inoltre anche un nuovo campione normale estratto dalla variabile aleatoria Y:

-0.068, -1.960, 0.443, 1.360, 0.810 .

Supposto che le varianze delle due popolazioni siano uguali, si verifichi l'ipotesi $H_0: \ \mu_X = \mu_Y$ con un livello di significatività del 5%.

Svolgimento
Supponendo che il primo campione sia normale:

$$m_X = \frac{1}{N}\sum_i x_i = 0.1351$$

$$s_X^2 = 0.6596 - (0.1351)^2 = 0.6414$$

$$\bar{s}_X^2 = \frac{1}{N-1}\sum_i (x_i - m_X)^2 = 0.7127 \longrightarrow \bar{s}_X = 0.8442$$

Pertanto il valore osservato (empirico) di t risulta essere:

$$t_{oss} = \frac{m_X - \mu}{\frac{\bar{s}_X}{\sqrt{N}}} = 0.5061$$

Il valore teorico di t ($t_{\alpha/2}$ a 9 g.d.l.) è $t_{0.995} = 3.25$.
Poiché è verificato $|t_{oss}| < t_{\alpha/2}$, H_0 è accettata.

Utilizzando la teoria dei campioni numerosi, perché H_0 sia accettata deve essere:

$$\frac{|m_X - \mu|}{\frac{\bar{s}_X}{\sqrt{N}}} \leq \mathcal{Z}_{\alpha/2}$$

con $\mathcal{Z}_{\alpha/2} = 2.575$. Quindi anche in questo caso H_0 è accettata.

Per rispondere all'ultima domanda dell'esercizio, si calcolano media e varianza campionaria anche per Y:

$$m_Y = 0.1170$$
$$\bar{s}_Y^2 = 1.619932$$

La varianza campionaria congiunta risulta essere:

$$\bar{s}^2 = \frac{9}{13}\bar{s}_X^2 + \frac{4}{13}\bar{s}_Y^2 = 0.991853$$

$$\bar{s} = 0.995918$$

$$t_{oss} = \frac{|m_X - m_Y|}{\bar{s}\sqrt{\frac{1}{N_X} + \frac{1}{N_Y}}} = 0.03318$$

$$t_{\alpha/2} = t_{0.025} = 2.16 \quad \text{con} \quad N_X + N_Y - 2 = 13 \text{ g.d.l.}$$

Poiché $|t_{oss}| < t_{\alpha/2}$ H_0 è accettata.

Esercizio 7.8

Per valutare con due diverse metodologie di analisi (X e Y) la concentrazione di una certa sostanza nel sangue, si effettua un prelievo ad un campione di 8 persone. Le otto concentrazioni rilevate nei due modi (espresse in ng/ml·h) sono le seguenti:

Campione X	1.43	1.91	0.77	0.85	2.96	3.61	1.13	2.12
Campione Y	3.10	0.81	2.20	2.02	0.80	1.06	2.35	1.82

Supponendo che tali valori seguano una distribuzione normale si chiede di:

a) realizzare un test di confronto tra le medie a livello di significatività $\alpha = 5\%$;

b) sottoporre a test (sempre con $\alpha = 5\%$) l'ipotesi che le due tecniche di analisi diano risultati incorrelati.

Svolgimento
Si ricordi che prima di effettuare il test di confronto tra medie occorre effettuare il test di confronto tra varianze (ovviamente con lo stesso livello di significatività).

Prima di tutto si calcolano medie e varianze campionarie dei due campioni:

$$\begin{aligned} m_X &= \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i = 1.8475 \\ m_Y &= \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} y_i = 1.7700 \\ \overline{s}_X^2 &= \frac{N_X}{N_X - 1}\left(\frac{1}{N_X}\sum_i x_i^2 - m_X^2\right) = 1.038193 \\ \overline{s}_Y^2 &= \frac{N_Y}{N_Y - 1}\left(\frac{1}{N_Y}\sum_i y_i^2 - m_Y^2\right) = 0.674543 \end{aligned}$$

Mentre la covarianza campionaria corretta è data da ($N_X = N_Y = N$):

$$\overline{s}_{XY} = \frac{N}{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_i x_i y_i - m_X m_Y\right) = -0.580143$$

- Test sul confronto di varianze: $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

$$F_{oss} = \frac{\overline{s}_X^2}{\overline{s}_Y^2} = 1.539106 \sim F_{7,7}$$

$$F_{7,7}(\alpha = 5\%) = 4.99$$

quindi l'ipotesi è accettata.

- Test sul confronto di medie: $H_0: \ \mu_X = \mu_Y$

$$t_{oss} = \frac{|m_X - m_Y|}{\overline{s}\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}} = 0.167495$$

dove

$$\overline{s} = \sqrt{\frac{N_X - 1}{N_X + N_Y - 2}\overline{s}_X^2 + \frac{N_Y - 1}{N_X + N_Y - 2}\overline{s}_Y^2} = \sqrt{\frac{1}{2}(\overline{s}_X^2 + \overline{s}_Y^2)}$$

$t_{oss} < 2.14$, quindi l'ipotesi H_0 è accettata.

- Test sul coefficiente di correlazione lineare: $H_0: \ \rho = 0$

$$t_{oss} = \sqrt{N-2}\ \frac{r}{1-r^2} = 2.356216$$

$$t_{N-2}(\alpha = 5\%) = t_6(\alpha = 5\%) = 2.45$$

$t_{oss} < t_6$, quindi l'ipotesi H_0 è accettata.

Esercizio 7.9

Date le due serie di 15 valori estratti da due distribuzioni normali, si sottoponga a verifica l'ipotesi che il coefficiente di correlazione lineare sia $\rho_0 = 0.5$, a livello di significatività $\alpha = 5\%$.

	X_1	X_2
1	−0.579	−0.634
2	+1.875	+2.358
3	−0.346	−0.091
4	−1.579	−0.247
5	+3.231	+1.502
6	+0.559	+0.495
7	+0.095	−0.478
8	+0.098	−0.391
9	+0.118	−0.499
10	+0.570	+2.069
11	+0.227	+1.429
12	−0.328	−0.056
13	+1.892	−1.884
14	+0.295	+0.745
15	+2.083	−1.082

Svolgimento

H_0: $\rho_0 = 0.5$ quindi si deve usare la statistica

$$S = \frac{\sqrt{N-3}}{2} \log\left(\frac{1+\mathcal{R}}{1-\mathcal{R}} \cdot \frac{1-\rho_0}{1+\rho_0}\right) \sim \mathcal{Z} \; .$$

Il coefficiente di correlazione è dato da:

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{S}_{12}}{\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2} = \frac{\overline{\mathcal{S}}_{12}}{\overline{\mathcal{S}}_1 \overline{\mathcal{S}}_2}$$

dove

$$\overline{\mathcal{S}}_{12} = \frac{1}{N-1} \sum_i (X_{1i} - \mathcal{M}_1)(X_{2i} - \mathcal{M}_2)$$

$$\overline{\mathcal{S}}_k = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (X_{ki} - \mathcal{M}_k)^2}$$

$$\mathcal{R} = \frac{\sum_i (X_{1i} - \mathcal{M}_1)(X_{2i} - \mathcal{M}_2)}{\sqrt{\sum_i (X_{1i} - \mathcal{M}_1)^2 \sum_i (X_{2i} - \mathcal{M}_2)^2}}$$

$$m_1 = +0.547400 \qquad m_2 = +0.215733$$

$$\sum_{i=1}^{15} (x_{1i} - m_1)^2 = 21.2431 \; ; \quad \sum_{i=1}^{15} (x_{2i} - m_2)^2 = 20.065835$$

$$\sum_{i=1}^{15} (x_{1i} - m_{1i})(x_{2i} - m_{2i}) = 4.349027$$

$$r = 0.210647$$

$$Z_{oss} = \frac{\sqrt{12}}{2} \log(0.511240) = -1.1620661$$

poiché $|Z_{oss}| < \mathcal{Z}_{\alpha/2} = 1.96$, l'ipotesi H_0 è accettata.

Esercizio 7.10

Dato il seguente campione bernoulliano (X, Y) di numerosità $N = 11$:

X	Y
$+1.10$	$+0.24$
-1.64	$+0.41$
$+0.09$	$+2.81$
-1.28	-0.58
$+0.19$	$+1.01$
-1.60	$+0.90$
-1.55	-0.69
$+0.04$	$+0.12$
$+2.35$	$+1.03$
$+2.27$	$+1.19$
-1.95	$+0.40$

a) si sottoponga a test, con livello di significatività $\alpha = 5\%$, l'ipotesi $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ (test a due code);

b) si sottoponga a test, con livello di significatività $\alpha = 5\%$, l'ipotesi $H_0 : \rho_0 = 0$;

c) si supponga che X e Y siano tratte dalla stessa variabile $\mathcal{N}(0, 1)$ in modo indipendente:

- si dica qual è il numero ν di estrazioni attese nell'intervallo $[0.1, 0.5]$ e la varianza di tale numero per un campione di numerosità pari a 22;
- si verifichi l'ipotesi che ν sia proprio il valore atteso sulla base del valore empirico N (test Z a due code, $\alpha = 5\%$).

Svolgimento

a) Per il campione dato risulta:

$$m_X = -0.180000$$

$$m_Y = +0.621818$$

$$s_X = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_i (x_i - m_X)^2} = 1.497507$$

$$s_Y = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_i (y_i - m_Y)^2} = 0.912667$$

$$r_{XY} = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y} = \frac{\frac{1}{N}\sum_i x_i y_i - m_X m_Y}{s_X s_Y} = 0.398172$$

Per effettuare il test sul confronto di varianze si usa la relazione:

$$\frac{\mathcal{S}_X^2}{\mathcal{S}_Y^2} \sim F_{N_X-1,N_Y-1}$$

Il valore empirico risulta essere:

$$F_{oss} = \frac{s_X^2}{s_Y^2} = 2.692238$$

il valore teorico è dato da:

$$F_{10,10}(\alpha/2 = 2.5\%) = 3.72$$

quindi l'ipotesi H_0 è accettata.

b) Per effettuare il test sul coefficiente di correlazione lineare si usa la relazione:

$$\frac{\mathcal{R}_{XY}}{\sqrt{1-\mathcal{R}_{XY}^2}}\sqrt{N-2} \sim t_{N-2}$$

Il valore empirico risulta essere:

$$t_{oss} = \frac{r_{XY}}{\sqrt{1-r_{XY}^2}}\sqrt{9} = 1.302192$$

il valore teorico è dato da:

$$t_9(\alpha/2 = 2.5\%) = 2.26$$

quindi l'ipotesi H_0 è accettata.

c) E' dato l'intervallo $I = [0.1, -0.5]$, si costruisce la seguente variabile aleatoria:

$$W_i = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x_i \text{ o } y_i \in I \quad \longrightarrow \quad p \\ 0 & \text{se} \quad x_i \notin I, y_i \notin I \quad \longrightarrow \quad q = 1 - p \end{cases}$$

La probabilità p è la probabilità per una normale standardizzata di cadere nell'intervallo $I = [0.1, -0.5]$ ed è data da $p = 1.915 - 0.0398 = 0.1517$. Ricordando che Np è la media di una distribuzione binomiale di numerosità N si ha:

$$\nu = E\{N_I\} = 22p = 3.337400$$

$$\sigma^2\{N_I\} = Npq = 22p(1-p) = 2.831116 \; .$$

Si consideri la statistica:

$$\frac{N_I - \nu}{\sigma} \sim \mathcal{Z}$$

$Z_{oss} = 0.988118$, mentre il valore teorico è dato da $\mathcal{Z}_{2.5\%} = 1.96$, quindi l'ipotesi H_0 è accettata.

Esercizio 7.11

Si considerino due campioni di numerosità 50, estratti indipendentemente dalle variabili doppie $(X,Y)_{(1)}$, $(X,Y)_{(2)}$; i due coefficienti di correlazione empirici hanno i valori: $r_1 = -0.65, r_2 = -0.42$.

Si sottoponga a test l'ipotesi $H_0 : \; \rho_1 = \rho_2$ al livello di significatività $\alpha = 5\%$.

Svolgimento

Si ricordi che, se $\rho \neq 0$, per N grande si ha (in legge):

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+R}{1-R} \sim \mathcal{N}[\frac{1}{2}\log\frac{1+\rho}{1-\rho}, \; \frac{1}{N-3}]$$

Si considerino ora le due variabili casuali A e B:

$$A = \frac{1}{2}\log\frac{1+R_1}{1-R_1} \sim \mathcal{N}[\frac{1}{2}\log\frac{1+\rho_1}{1-\rho_1}, \; \frac{1}{N-3}]$$

$$B = \frac{1}{2}\log\frac{1+R_2}{1-R_2} \sim \mathcal{N}[\frac{1}{2}\log\frac{1+\rho_2}{1-\rho_2}, \ \frac{1}{N-3}]$$

Si consideri inoltre la trasformazione:

$$\begin{aligned} V &= A - B = g(A,B) = \frac{1}{2}\log\frac{1+R_1}{1-R_1} - \frac{1}{2}\log\frac{1+R_2}{1-R_2} = \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{1+R_1}{1-R_1}\cdot\frac{1+R_2}{1-R_2} \end{aligned}$$

Se l'ipotesi $H_0: \ \rho_1 = \rho_2 \ (= \rho)$ è vera, allora V è una normale, con:

$$\mu_V = \mu_A - \mu_B = 0$$

$$\sigma_V^2 = \left[\frac{\partial g}{\partial A}\right]^2_{\mu_A} \sigma_A^2 + \left[\frac{\partial g}{\partial B}\right]^2_{\mu_B} \sigma_B^2 = \frac{1}{N-3} + \frac{1}{N-3} = \frac{2}{47}$$

Cioé si ha $V \sim \mathcal{N}[0, \frac{2}{47}]$. Il valore empirico è dato da

$$V_{oss} = \frac{1}{2}\log\frac{0.35}{1.65}\cdot\frac{1.42}{0.58} = -0.3276 \ ,$$

standardizzando, si ottiene:

$$Z_{oss} = \frac{V_{oss} - \mu_V}{\sigma_V} = -1.588$$

$$\mathcal{Z}_{\alpha/2} = \mathcal{Z}_{0.975} = 1.96$$

$|Z_{oss}| = 1.588 < 1.96$, quindi H_0 è accettata.

Esercizio 7.12

Si suppone di avere una popolazione rappresentata da una variabile statistica doppia (X, Y) e di estrarre da tale popolazione un campione di numerosità $N = 25$:

X	Y
-0.92	-0.21
$+0.57$	-0.65
$+0.29$	-0.13
$+0.45$	$+1.03$
$+0.12$	$+1.57$
-0.38	-0.03
-0.28	-0.31
-0.24	-2.61
-0.50	-0.95
-0.19	-1.22
-1.20	-1.81
$+0.01$	$+0.40$
$+1.09$	$+1.09$
$+0.73$	-0.56
-1.35	$+0.00$
-0.87	$+1.11$
$+0.15$	-0.35
$+1.42$	$+0.20$
-1.30	$+0.21$
-0.91	$+0.20$
-2.48	$+0.42$
$+0.93$	$+0.44$
-1.05	$+0.76$
$+0.30$	-1.33
-0.64	-1.51

Si verifichi l'ipotesi H_0 di indipendenza fra le componenti X e Y, al livello di significatività $\alpha = 5\%$, eseguendo un test non parametrico.

Svolgimento

Per prima cosa si ordinano le coppie di dati del campione in una tabella doppia di frequenze assolute F_{ij}; le caratteristiche di tale tabella sono:

$$X_{min} = -2.48 \quad ; \quad X_{max} = 1.42 \quad ; \quad \Delta X = 0.780$$
$$Y_{min} = -2.61 \quad ; \quad Y_{max} = 1.57 \quad ; \quad \Delta Y = 0.836$$

Ponendo:

$$I_{1X} = (-2.48, -1.70) \quad ; \quad I_{1Y} = (-2.610, -1.774)$$
$$I_{2X} = (-1.70, -0.92) \quad ; \quad I_{2Y} = (-1.774, -0.938)$$
$$I_{3X} = (-0.92, -0.14) \quad ; \quad I_{3Y} = (-0.938, -0.102)$$
$$I_{4X} = (-0.14, +0.64) \quad ; \quad I_{4Y} = (-0.102, +0.734)$$
$$I_{5X} = (+0.64, +1.42) \quad ; \quad I_{5Y} = (+0.734, +1.570)$$

Si ottiene:

	I_{1X}	I_{2X}	I_{3X}	I_{4X}	I_{5X}	Q_j
I_{1Y}		1	1			2
I_{2Y}			3	1		4
I_{3Y}			2	3	1	6
I_{4Y}	1	2	2	1	2	8
I_{5Y}		1	1	2	1	5
P_i	1	4	9	7	4	25

La formula utilizzata per la verifica dell'ipotesi di indipendenza è:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{(F_{ij}N - P_iQ_j)^2}{P_iQ_j} \sim \chi^2_{(n-1)(m-1)}$$

che in questo caso diventa:

$$\frac{1}{25}\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\frac{(25F_{ij} - P_iQ_i)^2}{P_iQ_j} \sim \chi^2_{(16)}$$

Si calcola:

$$\chi^2_{oss} = \frac{300.76}{25} = 12.03$$

Il valore di $\chi^2_{(16)}$ per $\alpha = 5\%$ è:

$$\chi^2_{(0.95)} = 26.3$$

Poiché $\chi^2_{oss} < \chi^2_{(0.95)}$ l'ipotesi H_0 è accettata.

Esercizio 7.13

Dati i campioni X e Y i cui valori numerici sono riportati nell' Es. 7.12, verificare l'ipotesi H_0 : $\mu_X = \mu_y$ (i campioni essendo indipendenti) mediante il test di Mann-Whitney, al livello di significatività $\alpha = 5\%$.

Svolgimento

È necessario passare ai campioni dei ranghi, $r(x)$ e $r(y)$, secondo quanto insegna la teoria di questo test [1] , ordinando i valori come se appartenessero ad un unico campione di numerosità 50.

x	$r(x)$	y	$r(y)$
-0.92	12	-0.21	24
$+0.57$	41	-0.65	15
$+0.29$	35	-0.13	26
$+0.45$	40	$+1.03$	45
$+0.12$	30	$+1.57$	50
-0.38	19	-0.03	27
-0.28	22	-0.31	21
-0.24	23	-2.61	1
-0.50	18	-0.95	11
-0.19	25	-1.22	8
-1.20	9	-1.81	3
$+0.01$	29	$+0.40$	37
$+1.09$	46.5	$+1.09$	46.5
$+0.73$	42	-0.56	17
-1.35	5	0.00	28
-0.87	14	$+1.11$	48
$+0.15$	31	-0.35	20
$+1.42$	49	$+0.20$	32.5
-1.30	7	$+0.21$	34
-0.91	13	$+0.20$	32.5
-2.48	2	$+0.42$	38
$+0.93$	44	$+0.44$	39
-1.05	10	$+0.76$	43
$+0.30$	36	-1.33	6
-0.64	16	-1.51	4

Lavorando ora sul campione estratto da X, si calcola la somma $R(x)$ dei ranghi $r(x)$, nonché la sua media e varianza:

$$
\begin{aligned}
R(x) &= 618.5 \\
\mu_{R(x)} &= \frac{N_x(N_x + N_y + 1)}{2} = 637.5
\end{aligned}
$$

[1] Si noti che nell'assegnazione dei ranghi se si hanno due (o più) valori uguali fra loro si assegna come rango a ciascuno di essi la media dei loro ranghi, secondo l'esempio seguente:

x	...	0.2	0.5	0.7	0.7	0.8	0.9	...
	...	6	7	8	9	10	11	...
$r(x)$	...	6	7	8.5	8.5	10	11	...

$$
\begin{aligned}
\sigma^2_{R(x)} &= \frac{N_x N_y (N_x + N_y + 1)}{2} = 2656.25 \\
\sigma_{R(x)} &= 51.54
\end{aligned}
$$

La formula utilizzata per la verifica dell'ipotesi H_0 è:

$$\frac{R(x) - \mu_{R(x)}}{\sigma_{R(x)}} \sim \mathcal{Z}$$

Si ottiene:

$$|Z_{oss}| = 0.3686$$

Si esegue il test a due code, con:

$$\mathcal{Z}_{(0.975)} = 1.96$$

Poiché $|Z_{oss}| < \mathcal{Z}_{(0.975)}$, l'ipotesi H_0 è accettata.

Si poteva giungere alla stessa conclusione lavorando in modo analogo sul campione dei ranghi $r(y)$.

Esercizio 7.14

Dati i campioni X e Y i cui valori numerici sono riportati nell' Es. 7.12, verificare l'ipotesi $H_0 : \sigma^2_X = \sigma^2_Y$ (i campioni essendo indipendenti) mediante il test di Siegel-Tuckey, al livello di significatività $\alpha = 5\%$.

Svolgimento

Anche in questo caso è necessario passare ai campioni dei ranghi $r_v(X)$ e $r_v(Y)$ secondo quanto richiesto dalla teoria: si ottiene quindi la tabella riportata alla pagina seguente.

Si calcola poi:

$$
\begin{aligned}
&R_v(x) = 653.5 \quad \text{(somma dei ranghi } r_v(x)) \\
&\mu_{R_v(x)} = 637.5 \\
&\sigma_{R_v(x)} = 51.54
\end{aligned}
$$

x	$r_v(x)$	y	$r_v(y)$
-0.92	24	-0.21	48
$+0.57$	19	-0.65	29
$+0.29$	31	-0.13	50
$+0.45$	22	$+1.03$	11
$+0.12$	42	$+1.57$	2
-0.38	37	-0.03	47
-0.28	44	-0.31	41
-0.24	45	-2.61	1
-0.50	36	-0.95	21
-0.19	49	-1.22	16
-1.20	17	-1.81	5
$+0.01$	43	$+0.40$	27
$+1.09$	8.5	$+1.09$	8.5
$+0.73$	18	-0.56	33
-1.35	10	0.00	46
-0.87	28	$+1.11$	6
$+0.15$	39	-0.35	40
$+1.42$	3	$+0.20$	36.5
-1.30	13	$+0.21$	34
-0.91	25	$+0.20$	36.5
-2.48	4	$+0.42$	26
$+0.93$	14	$+0.44$	23
-1.05	20	$+0.76$	15
$+0.30$	30	-1.33	12
-0.64	32	-1.51	8

Si esegue la verifica sull'ipotesi H_0 sapendo che:

$$\frac{R_v(x) - \mu_{R_v(x)}}{\sigma_{R_v(x)}} \sim \mathcal{Z}$$

quindi:

$$|Z_{oss}| = 0.3104$$

e poiché $|Z_{oss}| < \mathcal{Z}_{(0.975)} = 1.96$, l'ipotesi H_0 è accettata.

Esercizio 7.15

Dati i campioni X e Y i cui valori numerici sono riportati nell' Es. 7.12, verificare l'ipotesi $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ supponendo che i campioni non siano indipendenti: si usi quindi il test del segno, al livello di significatività $\alpha = 5\%$.

Svolgimento
In questo caso si considerano i dati dei due campioni come coppie di valori (X, Y), a ciascuna delle quali si attribuisce il segno + oppure −, a seconda che $Y > X$ oppure $Y < X$ (se $Y = X$ non si attribuisce nessun segno).

Si ottiene:

X	Y	Segno
−0.92	−0.21	+
+0.57	−0.65	−
+0.29	−0.13	−
+0.45	+1.03	+
+0.12	+1.57	+
−0.38	−0.03	+
−0.28	−0.31	−
−0.24	−2.61	−
−0.50	−0.95	−
−0.19	−1.22	−
−1.20	−1.81	−
+0.01	+0.40	+
+1.09	+1.09	
+0.73	−0.56	−
−1.35	0.00	+
−0.87	+1.11	+
+0.15	−0.35	−
+1.42	+0.20	−
−1.30	+0.21	+
−0.91	+0.20	+
−2.48	+0.42	+
+0.93	+0.44	−
−1.05	+0.76	+
+0.30	−1.33	−
−0.64	−1.51	−

Si calcola poi:

$N_p = 11$	numero dei segni +
$N_m = 13$	numero dei segni -
$N_{tot} = N_p + N_m = 24$	numero totale dei segni
$p = \frac{N_p}{N_{tot}} = 0.4583$	proporzione dei segni + sul totale dei segni.

La formula per la verifica dell'ipotesi H_0 è:

$$\frac{p - 0.5}{\frac{0.5}{\sqrt{N_{tot}}}} \sim \mathcal{Z}$$

Si ha:

$$|Z_{oss}| = 0.4086$$
$$\mathcal{Z}_{(0.975)} = 1.96$$

quindi l'ipotesi H_0 è accettata, poiché $|Z_{oss}| < \mathcal{Z}_{(0.975)}$.

Esercizio 7.16

Dati i campioni X e Y i cui valori numerici sono riportati nell' Es. 7.12, verificare l'ipotesi $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ supponendo che i campioni non siano indipendenti: si usi quindi il test del segno, al livello di significatività $\alpha = 5\%$.

Svolgimento

Anche in questo caso si considerano i dati dei due campioni come coppie di valori (X, Y), però ora si confrontano i moduli degli scarti $|X - m_X|$ e $|Y - m_Y|$ assegnando opportunamente i segni $+$ oppure $-$.

Si ha:

$$m_X = -0.2500$$
$$m_Y = -0.1696$$
$$V_X = |X - m_X|$$
$$V_Y = |Y - m_Y|$$

Si calcola poi:

$$\begin{aligned}
N_p &= 12 \\
N_m &= 13 \\
N_{tot} &= 25 \\
p &= \frac{N_p}{N_{tot}} = \frac{12}{25} = 0.48
\end{aligned}$$

V_y	V_x	Segno
0.04	0.67	+
0.48	0.82	+
0.04	0.54	+
1.20	0.70	−
1.74	0.37	−
0.14	0.13	−
0.14	0.03	−
2.44	0.01	−
0.78	0.25	−
1.05	0.06	−
1.64	0.95	−
0.57	0.26	−
1.26	1.34	+
0.39	0.98	+
0.17	1.10	+
1.28	0.62	−
0.18	0.35	+
0.37	1.67	+
0.38	1.05	+
0.37	0.66	+
0.59	2.23	+
0.61	1.18	+
0.93	0.80	−
1.16	0.55	−
1.34	0.39	−

La formula per la verifica dell'ipotesi H_0 è:

$$\frac{p - 0.5}{\frac{0.5}{\sqrt{N_{tot}}}} \sim Z$$

$$|Z_{oss}| = 0.20$$
$$\mathcal{Z}_{(0.975)} = 1.96$$

L'ipotesi H_0 è accettata, poiché $|Z_{oss}| < \mathcal{Z}_{(0.975)}$.

Esercizi

Esercizio 7.17

Si consideri il campione di valori:

0.302, 7.836, 1.790, 0.910, 1.330, 4.770, 3.060, 7.010

che rappresenta i tempi di attesa espressi in minuti tra due telefonate sulla stessa linea. Supponendo che la distribuzione di X sia

$$f(x) = \left(\frac{1}{\vartheta}\right) e^{-x/\vartheta} ,$$

si sottoponga a verifica l'ipotesi $H_0 : \ \vartheta = 5$, al livello di significatività del 5%. Si trovi inoltre l'intervallo fiduciario di ϑ per tale livello.

[**R:** L'ipotesi H_0 è accettata, $\chi^2_{oss} = 10.8032$;
l'intervallo fiduciario è $1.8756 \leq \vartheta \leq 7.8171$]

Esercizio 7.18

Date le seguenti dieci misure di una lunghezza L (espresse in centimetri) con distribuzione normale

1.005, 1.022, 1.088, 0.958, 1.028, 1.008, 1.044, 0.970, 1.066, 1.052

si sottoponga a test l'ipotesi $H_0 : \ \mu_L = 1$ cm, a livello di significatività $\alpha = 5\%$ (test a due code).

[**R:** H_0 è rifiutata; $Z_{oss} = 1.97085$]

Esercizio 7.19

Una variabile aleatoria X può assumere i valori -1 e $+1$. Si esegue una sequenza di 1000 estrazioni indipendenti e si costruisce la variabile

$$Y = \sum_{i=1}^{1000} X_i$$

ottenendo $y = 76$. In base a tale risultato, usando l'approssimazione dei campioni numerosi, si può ($\alpha = 5\%$) accettare l'ipotesi $H_0 : \ p(+1) = p(-1)$?

[**R:** L'ipotesi H_0 viene rifiutata; $Z_{oss} = 2.4033$]

Esercizio 7.20

In due sessioni di laurea si sono laureati rispettivamente $N_X = 40$ e $N_Y = 50$ studenti, ottenendo come voti medi (in centesimi) $m_X = 74$, $m_Y = 78$; gli scarti quadratici medi (corretti) delle due sessioni sono $\bar{s}_X = 8$, $\bar{s}_Y = 7$. Si vuole verificare l'ipotesi $H_0 : \mu_X = \mu_Y$, con $\alpha = 5\%$.

Si ripeta il conto considerando una volta σ_X^2, σ_Y^2 distinti, ed un'altra ponendo l'ipotesi $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$.

[**R:** H_0 è rifiutata in entrambi i casi; i valori empirici sono rispettivamente $Z_{oss} = 2.4903$ e $\cancel{Z_{oss} = 2.5277}$]

Esercizio 7.21

Sia dato il campione:

0.133, 0.068, 0.230, 0.324, -0.533, 1.024, 0.684, 0.580, 0.303, 0.266

Si sottoponga a verifica l'ipotesi $H_0 : \mu = 0$ nei due casi in cui si sappia che $X = \mathcal{N}[\mu, 1]$ e che $X = \mathcal{N}[\mu, \sigma^2]$. Si usi un livello di significatività del 10% e si spieghi la differenza dei due risultati.

[**R:** H_0 è accettata nel primo caso ($Z_{oss} = 0.9737$) e rifiutata nel secondo ($Z_{oss} = 2.3601$)]

Esercizio 7.22

Supposto che il campione di valori:

-0.308, 0.516, -1.265, 0.610, -0.154, -1.200, -0.068, 1.076, 0.251, 0.616

sia stato estratto da una $\mathcal{N}[\mu, 1]$, sottoporre a test l'ipotesi $H_0 : \mu = 0$, al livello di significatività del 5%.

[**R:** H_0 è accettata, $Z_{oss} = 0.6198$]

Esercizio 7.23

Un processo produttivo in regime di funzionamento normale produce un certo pezzo con una probabilità dello 0.01% che il pezzo sia difettoso. Per controllare il processo si esamina un campione di 3200 pezzi tra cui vengono trovati sei pezzi difettosi. Ci si chiede se l'ipotesi

$$H_0 : \text{percentuale dei pezzi difettosi} = 0.1\%$$

è accettabile al livello di significatività almeno pari al 5%.
Si calcoli inoltre il livello di significatività osservato

$$\alpha_0 = P\{\text{numero pezzi difettosi} > 6\}.$$

[**R:** L'ipotesi H_0 è rifiutata; $P\{S \leq 6\} = 0.9554$; $\alpha_0 = 4.46\%$]

Esercizio 7.24

Da un mazzo di 40 carte si estraggono, reinserendole nel mazzo, una alla volta 100 carte. Quali sono i valori limite per la variabile K = numero di estrazioni di un asso, per rifiutare l'ipotesi ($\alpha = 5\%$) che il mazzo contenga regolarmente 4 assi?

[**R:** $k \leq 4, \quad k \geq 16$]

Esercizio 7.25

Si vuole confrontare la durata di due diversi tipi di lampadine da 100W, prodotte in due diverse fabbriche. Dalla prima fabbrica si prende un campione di 31 lampadine, che risultano avere una durata media $m_1 = 142.5$ giorni, mentre un campione di uguale numerosità preso dalla seconda fabbrica risulta avere durata media $m_2 = 139.1$ giorni.

a) Supponendo note $\sigma_1^2 = 60$ e $\sigma_2^2 = 66$, si verifichi al livello $\alpha = 5\%$ l'ipotesi che le lampadine delle due fabbriche abbiano uguale durata media (test a due code).

b) Supponendo che i due campioni siano distribuiti normalmente e sapendo che le varianze campionarie corrette sono rispettivamente: $\overline{s}_1^2 = 95.22$, $\overline{s}_2^2 = 70.12$, si verifichino le ipotesi di base che le due varianze siano rispettivamente uguali a σ_1^2 e σ_2^2 (al livello di significatività $\alpha = 5\%$) (test a due code).

c) Sotto le ipotesi del punto b), si verifichi infine l'ipotesi che le varianze dei due campioni siano uguali ($\alpha = 5\%$, test a due code).

[**R:** a) $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ è accettata, $Z_{oss} = 1.686454$;
b) $H_0 : \sigma_1^2 = 60$ è rifiutata, $H_0 : \sigma_2^2 = 66$ è accettata;
c) $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ è accettata, $F_{oss} = 1.357958$]

Esercizio 7.26

Date le seguenti 20 estrazioni:

0.142	0.209	1.184	-2.510	-1.021
0.245	-1.672	1.145	-0.711	0.440
1.175	-1.305	1.415	-2.433	1.617
0.151	-0.761	0.979	1.504	-0.005

sottoporre a test

a) l'ipotesi H_0 che il campione sia estratto da una variabile casuale normale standardizzata;

b) l'ipotesi H_0 che il campione sia estratto da una $\mathcal{N}[\mu, \sigma^2]$

Si effettuino i test con $\alpha = 5\%$ e utilizzando i seguenti intervalli:

$$(-\infty, 0.9],\ (-0.9, -0.3],\ (-0.3, 0.3),\ [0.3, 0.9),\ [0.9, +\infty)\ .$$

[**R:** a) H_0 è accettata, $\chi^2_{oss} = 6.6615$;
b) H_0 è accettata, $\chi^2_{oss} = 3.650670$]

Esercizio 7.27

Si ritiene che dalle ore 8.00 alle ore 9.00 dei giorni feriali circoli, su una certa strada, un numero costante di autovetture. Si ritiene inoltre che nella stessa ora e sulla stessa strada il numero di autovetture in transito sia ridotto a 1/5 nella giornata di sabato e ad 1/10 nella giornata di domenica. Ponendo ad un certo punto della strada un contatore, che registra il numero di autovetture transitate, si sono osservati i seguenti valori:

Giorno	Numero autovetture
lunedì	9340
martedì	8728
mercoledì	8517
giovedì	8543
venerdì	8631
sabato	1834
domenica	729

Verificare, al livello di significatività $\alpha = 5\%$, l'adattamento della distribuzione empirica alla distribuzione teorica derivante dalle ipotesi fatte.

[**R:** L'ipotesi è rifiutata; $\chi^2_{oss} = 80.9833$]

Esercizio 7.28

Per 64 volte viene ripetuta la seguente procedura: una moneta è lanciata 4 volte, e si registra il numero X di "teste" ottenute. Si ottengono i seguenti risultati:

x_i	0	1	2	3	4
N_i	5	13	23	21	2

Sottoporre a verifica ($\alpha = 5\%$) l'ipotesi H_0 che la moneta non sia truccata.

[**R:** L'ipotesi è accettata; $\chi^2_{oss} = 3.417$]

Esercizio 7.29

Da una variabile aleatoria X si eseguono 100 estrazioni, che risultano raggruppate come segue:

Intervallo	N
$[0.00, 0.50)$	14
$[0.50, 0.75)$	12
$[0.75, 1.00)$	22
$[1.00, 1.25)$	19
$[1.25, 1.50)$	19
$[1.50, 2.00)$	10
$[2.00, +\infty)$	4

(N = numero di estrazioni per intervallo).

Verificare con un test χ^2 se tale distribuzione è compatibile con l'ipotesi che X sia distribuita come una $\mathcal{N}[1, 0.25]$, al livello di significatività α = 0.05.

[**R:** L'ipotesi è accettata; $\chi^2_{oss} = 6.6352$]

Esercizio 7.30

Nella tabella seguente è riportata la distribuzione di conteggi di batteri in un'apposita camera di conta, costituita da 400 quadrati:

Numero batteri per quadrato	Numero quadrati
0	34
1	68
2	112
3	94
4	55
5	21
6	12
7	4

Verificare il buon adattamento della distribuzione empirica ad una distribuzione poissoniana, la cui media è da stimare a partire da questi dati approssimandola alla prima cifra decimale (test a due code, $\alpha =$ 10%).

[**R:** H_0 è accettata; $\chi^2_{oss} = 5.4999$]

Esercizio 7.31

Secondo la genetica, i figli dei genitori i cui gruppi sanguigni sono rispettivamente H e K avranno sangue del gruppo H, HK, K con probabilità che stanno fra loro nel rapporto 1:2:1. Su 400 di tali bambini esaminati se ne sono riscontrati 28% del gruppo H, 47% del gruppo HK e 25% del gruppo K.
Con un livello di significatività del 5% (test a due code), i risultati sperimentali confermano o no la legge genetica sovramenzionata?

[**R:** H_0 è accettata; $\chi^2_{oss} = 2.16$]

Esercizio 7.32

Si fa l'ipotesi che una certa variabile abbia una distribuzione di probabilità uniforme. Dalla variabile è estratto un campione di numerosità 100 e i risultati sono raggruppati nella seguente tabella:

Classi	Freq. rel. empiriche
20-30	8
30-40	10
40-50	15
50-60	22
60-70	20
70-80	13
80-90	7
90-100	5

Verificare l'ipotesi per $\alpha = 0.05$ e $\alpha = 0.10$.

[**R:** H_0 è accettata per $\alpha = 0.05$ e rifiutata per $\alpha = 0.10$]

Esercizio 7.33

Un'aula contiene 10 file di banchi; 30 studenti si distribuiscono sui banchi nel seguente modo:

Fila	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	3	4	0	6	3	5	3	2	4	0

Si esegua un test χ^2, al livello di significatività $\alpha = 5\%$, per verificare l'ipotesi che la distribuzione sia uniforme.

[**R:** H_0 è accettata; $\chi^2_{oss} = 11.\overline{3}$]

Esercizio 7.34

Si dispone di 100 estrazioni da una variabile aleatoria a valori compresi in $[-1, 1]$ e si vuole verificare se essa sia distribuita uniformemente. A tale scopo si suddivide $[-1, 1]$ in sei intervalli uguali ed entro tali intervalli, presi in ordine crescente, si contano rispettivamente:

$$15, \quad 19, \quad 18, \quad 20, \quad 13, \quad 15$$

valori estratti. Si effettui la verifica utilizzando un test del χ^2, con livello di significatività $\alpha = 5\%$.

[**R:** H_0 è accettata; $\chi^2_{oss} = 2.24$]

Esercizio 7.35

Si dispone di un campione di 100 estrazioni da una variabile aleatoria, raggruppate in intervalli secondo la seguente tabella:

Intervallo	N
0.00 - 0.36	11
0.36 - 0.72	32
0.72 - 1.08	26
1.08 - 1.44	21
1.44 - 1.80	8
1.80 - 2.16	2

verificare (test χ^2, $\alpha = 5\%$) sulla base di tali dati se sia accettabile l'ipotesi che la densità di probabilità sia:

$$f(t) = 2te^{-t^2} \qquad (t > 0)$$

[**R:** H_0 è accettata; $\chi^2_{oss} = 2.304$]

Esercizio 7.36

I voti (≥ 15) conseguiti in un appello d'esame, da 320 studenti, sono stati suddivisi in 8 intervalli (ΔV_i) e in corrispondenza si è riportata la loro numerosità N_i:

ΔV_i	N_i
14.5 - 16.5	35
16.5 - 18.5	51
18.5 - 20.5	70
20.5 - 22.5	44
22.5 - 24.5	28
24.5 - 26.5	25
26.5 - 28.5	25
28.5 - 30.5	42

Si verifichi il buon adattamento, al livello di significatività $\alpha = 5\%$, della distribuzione empirica dei voti ad una distribuzione uniforme nell'intervallo (14.5 - 30.5), test del χ^2 ad una coda.

[**R:** H_0 è rifiutata; $\chi^2_{oss} = 41.5$]

Esercizio 7.37

Su un individuo che soffre di ipotensione si è provata una nuova cura, misurando la pressione per 10 giorni prima dell'inizio della cura e per gli altri 10 giorni dopo l'inizio. Posto X = pressione prima della cura ed Y = pressione dopo la cura, per i due campioni si sono trovati i seguenti risultati:

$$m_X = 96.3, \quad \bar{s}_X = 4.27, \quad N_X = 10$$
$$m_Y = 100.2, \quad \bar{s}_Y = 4.52, \quad N_Y = 10$$

Supposto che le due popolazioni siano distribuite normalmente e che le loro varianze siano uguali, si sottoponga a test l'ipotesi $H_0 : \mu_X = \mu_Y$.

[**R:** H_0 è accettata; $t_{oss} = 1.9834$]

Esercizio 7.38

Vengono eseguite 10 diverse misure della percentuale di metanolo contenuta in una certa soluzione, ottenendo:

$$m = 8.34\%, \quad \bar{s} = 0.03\%$$

Supponendo che le misure siano distribuite normalmente, determinare l'intervallo fiduciario per μ, con $\alpha = 5\%$.

[**R:** $8.3186 \leq \mu \leq 8.3614$]

Esercizio 7.39

Su due diverse partite di componenti, A e B, si effettuano misure di resistenza elettrica, ottenendo i valori:

A (ohm)	B (ohm)
0.140	0.135
0.138	0.140
0.143	0.142
0.142	0.136
0.144	0.138
0.137	0.140

Supponendo che i campioni siano estratti da popolazioni normali di uguale varianza, si sottoponga a test l'ipotesi $H_0 : \mu_A = \mu_B$ al livello di significatività α del 5%.

[**R:** H_0 è accettata; $t_{oss} = 1.3723$]

Esercizio 7.40

Dato il campione normale:

1.589, 0.089, -0.383, -0.154, 0.448, 0.933, -0.873, -0.015

sottoporre a test l'ipotesi $H_0 : \mu = 0$ per $\alpha = 1\%$ e per $\alpha = 5\%$.

[**R:** H_0 è accettata in entrambi i casi; $t_{oss} = 0.7455$]

Esercizio 7.41

Di una quantità fisica vengono eseguite in epoche diverse due serie di misure di uguale numerosità $N = 16$ per verificare se sono avvenute variazioni nel tempo. Si assuma che le due serie siano campioni bernoulliani indipendenti estratti da distribuzioni gaussiane e che le varianze campionarie corrette siano rispettivamente $\overline{s}_1^2 = 0.0232$ e $\overline{s}_2^2 = 0.0187$. Si determini mediante un test a due code con livello di significatività $\alpha = 1\%$, la massima differenza fra le medie campionarie che consente di accettare l'ipotesi che non si siano verificate variazioni nel tempo.

[**R:** $|m_1 - m_2|_{max} = 0.1259$]

Esercizio 7.42

Per verificare se l'esposizione ai vapori di cadmio condiziona una diversa funzionalità respiratoria si considerano due gruppi di cinque persone ciascuno, di pari condizioni fisiche: il gruppo A sia costituito da operai esposti da almeno 10 anni ai vapori di cadmio; il gruppo B da persone non esposte a tali vapori. Sui due gruppi si eseguono delle prove respiratorie ottenendo le seguenti capacià vitali (in litri):

Gruppo A	4.5	4.51	3.77	4.22	4.68
Gruppo B	4.2	5.29	5.52	3.71	4.02

Considerando tali campioni dei campioni normali si valuti l'ipotesi H_0 : $\mu_A = \mu_B$, con $\alpha = 10\%$.
Prima del confronto tra medie si effettui il confronto tra varianze; i test vanno effettuati a 2 code.

[**R:** L'ipotesi $H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ è accettata, $F_{oss} = 0.1961$;
l'ipotesi $H_0 : \mu_A = \mu_B$ è accettata, $t_{oss} = -0.5379$]

Esercizio 7.43

Durante due settimane successive (domenica esclusa) le concentrazioni quotidiane di piombo (μg/m^3) misurate in campioni di polveri atmosferiche sono risultate:

	Lun	Mar	Mer	Gio	Ven	Sab
I	0.719	0.607	0.432	0.361	0.662	0.223
II	0.517	-	0.541	0.245	0.401	0.145

Supponendo che i campioni seguano una distribuzione normale, si vuole verificare che la concentrazione media settimanale di piombo non sia significativamente diversa tra le due settimane, con $\alpha = 5\%$. Si esegua anche il confronto tra le varianze con lo stesso livello di significatività.

[**R:** $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ è accettata; $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ è accettata]

Esercizio 7.44

Dati due campioni normali, con:

$$\begin{array}{rclrcl} N_X &=& 8 & N_Y &=& 5 \\ m_X &=& 0.204250 & m_Y &=& 0.117000 \\ \overline{s}_X^2 &=& 0.600436 & \overline{s}_Y^2 &=& 1.619932 \end{array}$$

verificare l'ipotesi $H_0 :\ \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$, con $\alpha = 5\%$.

[**R:** H_0 è accettata; $F_{oss} = 0.3707$]

Esercizio 7.45

Per controllare la stabilità di un ponte si misura il dislivello tra un punto posto sul ponte ed un altro punto che si considera fisso. Si eseguono con la stessa metodologia due serie di misure, una al tempo T_1 ed un'altra al tempo T_2, con risultati rispettivamente:

Q_1 (m)	1.31823 1.31817 1.31830 1.31832
Q_2 (m)	1.31814 1.31820 1.31807 1.31801

Supposto che le due popolazioni abbiano la stessa varianza, si sottoponga a test, con livello di significatività $\alpha = 5\%$, l'ipotesi che la quota del punto sotto controllo sia rimasta immutata ($H_0 : \mu_1 = \mu_2$).
Inoltre si sottoponga a test l'ipotesi $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, con $\alpha = 1\%$.

[**R:** L'ipotesi che la quota del punto sia rimasta immutata viene rifiutata; l'ipotesi $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ viene accettata]

Esercizio 7.46

In un processo produttivo, un prodotto in polvere viene insacchettato automaticamente da una macchina che, per garanzia del costruttore, dovrebbe dare uno scarto quadratico medio, nel peso del sacchetto riempito, di $\sigma = 1$ g. A scopo di verifica, viene pesato un campione di 22 sacchetti, trovando uno scarto quadratico medio empirico corretto $\overline{s} = 1.5$ g. Si valuti, al livello di significatività $\alpha = 5\%$, se l'ipotesi $H_0 : \sigma^2 = 1$ sia da ritenersi accettabile.

[**R:** H_0 è rifiutata; $\chi^2_{oss} = 47.25$]

Esercizio 7.47

Una macchina produce sferette di acciaio del diametro di 0.5 centimetri. Per garanzia del costruttore lo scarto quadratico medio di tale diametro dovrebbe essere $\sigma = 0.1$ millimetri. Per controllo si misurano i diametri di 30 sferette e si trova $\overline{s} = 0.145$ mm. Si valuti per $\alpha = 5\%$, se l'ipotesi $H_0 : \sigma^2 = 0.01$ è accettabile. Si calcoli inoltre l'intervallo fiduciario per σ^2.

[**R:** H_0 è rifiutata; $0.0133 \leq \sigma^2 \leq 0.0381$]

Esercizio 7.48

Si trovi la numerosità N minima necessaria perché un campione con coefficiente empirico $r = 20\%$, porti a rifiutare $H_0 : \rho = 0$, al livello di significatività $\alpha = 5\%$.

[**R:** $N > 99$]

Esercizio 7.49

Si consideri la serie di valori x_i ($i = 0, \ldots, 49$) data dalla SERIE 0 dell'Es. 7.2, questa sequenza è generata automaticamente al calcolatore, ma resta il sospetto che il programma di calcolo sia tale da creare una correlazione tra un'estrazione e la successiva. Per decidere al riguardo si calcoli la "autocorrelazione" tra x_i ($i = 0, \ldots, 48$) ed x_{i+1} ($i+1 = 1, \ldots, 49$) e si sottoponga a test, al livello $\alpha = 5\%$, l'ipotesi che $\rho = 0$.

[**R:** H_0 è accettata; $t_{oss} = -0.0010$]

Esercizio 7.50

Dieci studenti seguono un corso universitario e, per valutare l'efficacia delle lezioni, si rilevano il numero di ore di lezione seguite e il voto conseguito all'esame finale per ogni studente, ottenendo le seguenti coppie di valori:

Ore	Voto
39	28
33	25
35	25
38	30
32	18
30	24
33	26
27	24
30	20
35	25

Dopo aver calcolato medie, varianze e coefficiente di correlazione empirici, si dica se, con un livello di significatività del 5%, il valore di R è compatibile con l'ipotesi $H_0 : \ \rho = 0$.

[**R:** H_0 è rifiutata; $t_{oss} = 2.404142$]

Esercizio 7.51

Date le dieci coppie di valori estratte da una normale doppia, si sottoponga a test l'ipotesi $H_0 : \ \rho = 0.8$ con $\alpha = 5\%$:

X	Y
0.25	-1.15
-0.97	-0.58
-1.81	-1.17
1.50	1.94
-1.72	-2.97
0.29	-0.73
-1.35	-0.97
-0.65	-1.31
0.06	-0.79
-1.93	-1.80

[**R:** H_0 è accettata; $Z_{oss} = -0.1467$]

Esercizio 7.52

Date due serie di 50 numeri tratti da due variabili distribuite normalmente, si vuole verificare l'ipotesi che i due campioni siano incorrelati, con $\alpha = 5\%$. Si sa che:

$$\begin{aligned} s_1^2 &= 0.931759 \\ s_2^2 &= 1.007198 \\ s_{12}^2 &= -0.063900 \end{aligned}$$

[**R:** H_0 è accettata; $t_{oss} = -0.4580$]

Esercizio 7.53

Si considerino i campioni (indipendenti) estratti da due classi di studenti universitari che hanno sostenuto lo stesso esame relativo a una certa materia. I voti (in centesimi) dei due campioni sono risultati i seguenti:

Classe A	63	72	58	74	62	63	69	54	59	66	75	65
Classe B	60	78	62	90	76	52	67	87	73	84		

Si sottoponga a verifica l'ipotesi $H_0 : \mu_A = \mu_B$ al livello di significatività del 5%, utilizzando il test di Mann-Whitney.

[**R:** $|Z_{oss}| = 1.61$; l'ipotesi H_0 è accettata]

Esercizio 7.54

Si considerino i due campioni A e B (indipendenti) i cui valori sono riportati nell'Es. 7.53. Si sottoponga a verifica l'ipotesi $H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ (con $\alpha = 5\%$), utilizzando il test di Siegel-Tuckey.

[**R:** $|Z_{oss}| = 1.81$; l'ipotesi H_0 è accettata]

Esercizio 7.55

Si consideri un campione di 25 studenti, i quali sostengono un esame preliminare relativo a una certa materia di studio, seguono quindi un corso su tale materia e da ultimo ne sostengono l'esame finale. I voti ottenuti dagli studenti nei due esami sono i seguenti:

Studente	Pre (1)	Post (2)
1	50	68
2	82	80
3	38	51
4	42	66
5	55	55
6	20	38
7	35	50
8	46	40
9	70	65
10	59	56
11	42	61
12	40	52
13	49	49
14	50	72
15	63	54
16	32	45
17	41	58
18	55	63
19	45	72
20	49	49
21	41	38
22	58	80
23	68	79
24	53	62
25	47	50

Verificare ($\alpha = 5\%$) l'ipotesi $H_0: \mu_1 = \mu_2$ mediante il test del segno.

[**R:** $p = 0.73$; $|Z_{oss}| = 2.15$; l'ipotesi H_0 è rifiutata]

8 IL METODO DI STIMA DEI MINIMI QUADRATI

Formulazione generale del problema di stima

È dato un vettore di "valori osservati" Y_0 estratti da una variabile casuale a n dimensioni Y:

$$Y_0 = \begin{bmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{0n} \end{bmatrix} \quad ; \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

Della variabile casuale Y non si conosce la distribuzione, ma si sa che il vettore dei valori medi (detto vettore delle "osservabili"):

$$\mu_Y = y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

è ristretto a stare su una varietà lineare V a m dimensioni, detta anche "varietà dei valori ammissibili".

Inoltre, sapendo quali sono le modalità con cui sono state svolte le osservazioni, si può dire che la covarianza della variabile casuale Y ha forma del tipo:

$$C_{YY} = \sigma_0^2 Q$$

dove σ_0^2 è un fattore incognito e Q è una matrice nota.

Sulla base di quanto scritto sopra, si vogliono determinare le stime $\hat{y}$ delle osservabili e la stima $\hat{\sigma}_0^2$ del fattore incognito.

Principio di stima

Si impone che la stima $\hat{y}$ sia tale da soddisfare le condizioni:

$$\begin{cases} (Y_0 - \hat{y})^+ Q^{-1}(Y_0 - \hat{y}) = min \\ \hat{y} \in V \end{cases}$$

e che la stima $\hat{\sigma}_0^2$ sia proporzionale alla forma quadratica da minimizzare:

$$\hat{\sigma}_0^2 = cost(Y_0 - \hat{y})^+ Q^{-1}(Y_0 - \hat{y})$$

con la costante fatta in modo tale che $\hat{\sigma}_0^2$ sia una stima corretta di σ_0^2.

Soluzione del problema minimi quadrati nel caso lineare

- **Modello parametrico [2] :** $\quad y = Ax + a$

Si suppone di avere a disposizione n equazioni di osservazione in funzione di m parametri.

[2] La matrice A è anche detta "matrice disegno" del problema; mentre la matrice $N = A^+ Q^{-1} A$ è detta "matrice normale".

– Stimatori di parametri, osservabili e scarti:

$$\hat{x} = (A^+Q^{-1}A)^{-1}A^+Q^{-1}(Y_0 - a) \qquad \text{parametri}$$

$$\hat{y} = A\hat{x} + a \qquad \text{osservabili}$$

$$\hat{\varepsilon} = Y_0 - \hat{y} = Y_0 - A\hat{x} - a \qquad \text{scarti}$$

– Stima di σ_0^2:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\varepsilon}^+Q^{-1}\hat{\varepsilon}}{n-m}$$

– Stima delle matrici di covarianza:

$$C_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2(A^+Q^{-1}A)^{-1}$$

$$C_{\hat{y}\hat{y}} = \hat{\sigma}_0^2A(A^+Q^{-1}A)^{-1}A^+$$

$$C_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}} = \hat{\sigma}_0^2[Q - A(A^+Q^{-1}A)^{-1}A^+]$$

- **Modello con equazioni di condizione:** $By = b$

Si suppone di avere a disposizione r equazioni di condizione.

– Stimatori di osservabili e scarti:

$$\hat{y} = Y_0 - QB^+(BQB^+)^{-1}(BY_0 - b) \qquad \text{osservabili}$$

$$\hat{\varepsilon} = Y_0 - \hat{y} = QB^+(BQB^+)^{-1}(BY_0 - b) \qquad \text{scarti}$$

– Stima di σ_0^2:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\varepsilon}^+Q^{-1}\hat{\varepsilon}}{r}$$

– Stima delle matrici di covarianza:

$$C_{\hat{y}\hat{y}} = \hat{\sigma}_0^2[Q - QB^+(BQB^+)^{-1}BQ]$$

$$C_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}} = \hat{\sigma}_0^2 QB^+(BQB^+)^{-1}BQ$$

- **Modello con equazioni di vincolo**

Si suppone di avere a disposizione, oltre ad n equazioni d'osservazione in funzione di m parametri x, k equazioni di vincolo relative ai parametri stessi $Hx = h$. Tali equazioni di vincolo vengono trattate come equazioni di "pseudo-osservazione", cioé come se rappresentassero osservazioni nulle di una variabile casuale Z, eseguite con precisione infinita:

$$\begin{aligned} y &= Ax + a \\ z &= Hx - h = 0 \end{aligned}$$

Il modello stocastico per tale problema è il seguente:

$$\begin{cases} \mu_Z &= 0 \\ C_{ZZ} &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu_Y &= y \\ C_{YY} &= \sigma_0^2 Q \end{cases} \qquad C_{YZ} = 0$$

Dal punto di vista pratico, occorre approssimare la varianza nulla delle osservazioni z con una varianza molto piccola (infinitesima), in modo tale che il peso di tali osservazioni risulti molto grande ma numericamente trattabile (le "pseudo-osservazioni" saranno in tal modo sovrappesate):

$$C_{ZZ} = \sigma_0^2 \varepsilon I$$

– Stimatori di parametri e osservabili:

$$\hat{x} = \{A^+Q^{-1}A + H^+(\varepsilon^{-1})H\}^{-1}\{A^+Q^{-1}(Y_0 - a) + H^+(\varepsilon^{-1})h\}$$

$$\hat{y} = A\hat{x} + a$$

$$\hat{z} = H\hat{x} - h$$

– Scarti residui:

$$\hat{v} = Y_0 - \hat{y} = Y_0 - A\hat{x} - a$$

$$Z_0 - \hat{z} = -H\hat{x} + h$$

– Stima di σ_0^2:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{(Y_0 - A\hat{x} - a)^+ Q^{-1}(Y_0 - A\hat{x} - a) + (H\hat{x} - h)^+(\varepsilon^{-1})(H\hat{x} - h)}{n + k - m}$$

- **Regressione lineare**

  Si tratta di un caso particolare di minimi quadrati di tipo lineare in cui l'osservabile y dipende da una o più variabili ξ_i secondo il modello:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i \xi_i$$

Inoltre deve essere verificata la condizione: $Q = I$.

I parametri da stimare sono:

$$x = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}$$

La matrice disegno, di dimensioni $(n, k+1)$, è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \xi_{11} & \dots & \xi_{k1} \\ 1 & \xi_{12} & \dots & \xi_{k2} \\ 1 & \xi_{13} & \dots & \xi_{k3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \xi_{1n} & \dots & \xi_{kn} \end{bmatrix}$$

Si introduce la matrice T, di dimensioni (n, k):

$$T = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{k1} \\ \xi_{12} & \dots & \xi_{k2} \\ \xi_{13} & \dots & \xi_{k3} \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_{1n} & \dots & \xi_{kn} \end{bmatrix}$$

Se sono verificate le condizioni:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{1i} = \sum_{i=1}^{n} \xi_{2i} = \ldots = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki} = 0$$

la soluzione si ottiene tramite formule più semplici.

– Stima dei parametri:

$$\hat{b}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_{0i}$$

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \vdots \\ \hat{b}_k \end{bmatrix} = (T^+T)^{-1}T^+Y_0$$

– Stima degli scarti:

$$\hat{\varepsilon}_i = y_{0i} - \hat{y}_i$$

– Stima di σ_0^2:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\varepsilon}^+\hat{\varepsilon}}{n - k - 1}$$

– Stima della matrice di covarianza:

$$C_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ & \\ 0 & (T^+T)^{-1} \end{bmatrix} = \hat{\sigma}_0^2(A^+A)^{-1}$$

Soluzione del problema minimi quadrati nel caso non lineare

Si considera il caso in cui il modello è di tipo parametrico e il legame funzionale fra le osservabili y e i parametri x è di tipo non lineare:

$$
\begin{cases}
y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_m) \\
y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_m) \\
\cdots \\
\cdots \\
\cdots \\
y_n = f_n(x_1, x_2, \cdots, x_m)
\end{cases}
$$

Se è noto un vettore di opportuni valori approssimati dei parametri x, detto $\tilde{x}$, si può linearizzare il sistema di equazioni d'osservazione per mezzo di uno sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine:

$$
\begin{aligned}
&y_1 = f_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_m) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1 - \tilde{x}_1) + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x_m - \tilde{x}_m) \\
&y_2 = f_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_m) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1 - \tilde{x}_1) + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(x_m - \tilde{x}_m) \\
&\cdots \\
&\cdots \\
&y_n = f_n(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_m) + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_1 - \tilde{x}_1) + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x_m - \tilde{x}_m)
\end{aligned}
$$

Ponendo $x_i - \tilde{x}_i = \delta x_i$ si ha il seguente sistema di equazioni:

$$
\begin{cases}
y_1 = f_1(\tilde{x}) + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\delta x_2 + \cdots + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m}\delta x_m \\
y_2 = f_2(\tilde{x}) + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\delta x_1 + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\delta x_2 + \cdots + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_m}\delta x_m \\
\cdots \\
\cdots \\
y_n = f_n(\tilde{x}) + \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}\delta x_1 + \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}\delta x_2 + \cdots + \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m}\delta x_m
\end{cases}
$$

Tali equazioni sono lineari in $\delta x_1, \delta x_2, \cdots, \delta x_m$, che rappresentano le nuove quantità da stimare. In forma matriciale il sistema si scrive:

$$y = A\delta x + f(\tilde{x})$$

- Stima delle variazioni dei parametri $\delta\hat{x}$:

$$\delta\hat{x} = (A^+Q^{-1}A)^{-1}A^+Q^{-1}(Y_0 - f(\tilde{x}))$$

- Stima dei parametri $\hat{x}$:

$$\hat{x} = \tilde{x} + \delta\hat{x}$$

Formulazione generale del problema non lineare (utile nel caso in cui il problema sia non lineare anche nelle osservabili: $g(x, y) = 0$).

Linearizzando, ci si può ricondurre a un modello che si può scrivere come:

$$D\eta = A\xi + d$$

(η = osservabili; ξ = parametri).

Si pone:

$$\begin{aligned} K &= DQD^+ \\ N &= A^+K^{-1}A \\ U_0 &= D\eta_0 - A\hat{\xi} - d \ . \end{aligned}$$

- Stima dei parametri:

$$\hat{\xi} = N^{-1}A^+K^{-1}(D\eta_0 - d)$$

- Stima delle osservabili:

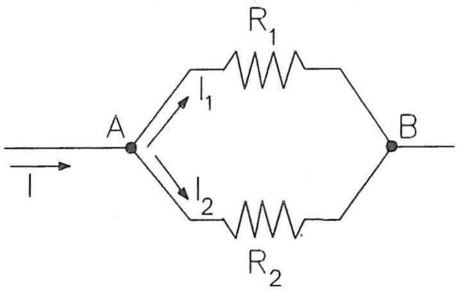
$$\hat{\eta} = \eta_0 - QD^+K^{-1}U_0$$

8.1 Minimi quadrati lineari

Problemi risolti

Esercizio 8.1.1

Sia dato il circuito in figura e si supponga che le resistenze R_1, R_2 siano note esattamente e che le correnti I, I_1, I_2 siano misurate con la stessa precisione ed in modo indipendente.



a) Si scrivano le equazioni di condizione che le osservabili devono soddisfare e si determinino gli stimatori minimi quadrati di I, I_1, I_2 e $\hat{\sigma}_0^2$.

b) Si risolva l'esercizio con il metodo dei parametri aggiuntivi.

Svolgimento

a) Svolgimento con equazioni di condizione:

Si consideri la variabile casuale

$$Y = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I \end{bmatrix}$$

avendo misurato I_1, I_2 ed I si ha a disposizione un'estrazione dalla variabile Y, che sarà indicata con Y_0. Se gli errori di misura sono puramente accidentali si può porre ragionevolmente supporre che le medie $\overline{I}_1, \overline{I}_2$ e $\overline{I}$ soddisfino le condizioni fisiche:

$$\begin{cases} \overline{I}_1 + \overline{I}_2 = \overline{I} \\ R_1\overline{I}_1 = R_2\overline{I}_2 \end{cases}$$

che, in forma sintetica, si scrivono:

$$B\overline{y} = b \ ,$$

essendo:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 & -R_2 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

In generale si ha:

$$BY_0 = b_{oss} \neq b \ .$$

Si vuole allora dare una stima $\hat{y}$ di $\overline{y}$ che tenga conto delle informazioni che provengono dal vettore delle osservazioni Y_0 e dalle relazione di vincolo. Dalla teoria dei minimi quadrati[3]:

$$\hat{y} = Y_0 - B^+ K^{-1} \ \Delta$$

essendo Δ:

$$\Delta = BY_0 - b = b_{oss} - b$$

In questo caso:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 + I_2 - I \\ R_1 I_1 - R_2 I_2 \end{bmatrix}$$

$$K = BB^+ = \begin{bmatrix} 3 & R_1 - R_2 \\ R_1 - R_2 & R_1^2 + R_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\det K = 2(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)$$

$$K^{-1} = \frac{1}{2(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)} \begin{bmatrix} R_1^2 + R_2^2 & R_2 - R_1 \\ R_2 - R_1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$K^{-1}\Delta = \begin{bmatrix} \dfrac{(R_1^2 + R_2^2)(I_1 + I_2 - I) + (R_2 - R_1)(I_1 R_1 - R_2 I_2)}{2(R_1^2 + R_2^2 + 2R_1 R_2)} \\[2ex] \dfrac{(R_2 - R_1)(I_1 + I_2 - I) + 3(R_1 I_1 - R_2 I_2)}{2(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)} \end{bmatrix}$$

[3]dove $K = BQB^+ = BB^+$, dato che in questo esercizio $Q = I$.

Quindi la stima $\hat{y}$ è data da:

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \\ \hat{I} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)} \begin{bmatrix} R_2^2 I_1 + R_1 R_2 I_2 + (R_2 + R_1) R_2 I \\ R_1 R_2 I_1 + R_1^2 I_2 + (R_2 + R_1) R_1 I \\ R_2(R_1+R_2) I_1 + R_1(R_1+R_2) I_2 + (R_1+R_2)^2 I \end{bmatrix}$$

Per la stima di σ_0^2, dalla teoria si ha:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{r}\{\Delta^+ K^{-1} \Delta\} = \frac{1}{r}\{\Delta^+ (BB^+)^{-1} \Delta\}$$

essendo r il numero delle equazioni di condizione, ovvero il numero di righe della matrice B. Quindi:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{4(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)} \{(I_1 + I_2 - I)[I_1(R_2^2 - R_1^2 + 2R_1 R_2) +$$

$$+ I_2(2R_1 R_2 - R_2^2 + R_1^2) - (R_1^2 + R_2^2) I] +$$

$$+ 3(R_1 I_1 - R_2 I_2)^2\}$$

b) <u>Svolgimento con parametri aggiuntivi:</u>

È possibile esprimere I_1, I_2, I in funzione della differenza di potenziale ΔV tra A e B:

$$Y = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I \end{bmatrix} \qquad E(Y) = \overline{y} = \begin{bmatrix} \Delta V / R_1 \\ \Delta V / R_2 \\ \dfrac{\Delta V}{\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)} \end{bmatrix}$$

Quindi le osservabili y sono legate al parametro ΔV da una relazione lineare del tipo:

$$y = Ax + a$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} 1/R_1 \\ \\ 1/R_2 \\ \\ \dfrac{1}{\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)} \end{bmatrix} \quad ; \quad x = [\Delta V] \quad ; \quad a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La stima del parametro x è data da:

$$\hat{x} = (A^{+}A)^{-1}A^{+}Y_0$$

dove:

$$\begin{aligned} A^{+}Y_0 &= \left[\frac{1}{R_1} \quad \frac{1}{R_2} \quad \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I \end{bmatrix} = \\ &= \frac{I_1}{R_1} + \frac{I_2}{R_2} + \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) I \end{aligned}$$

$$A^{+}A = \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)^2 = \frac{2(R_1^2+R_2^2+R_1R_2)}{R_1^2R_2^2}$$

$$(A^{+}A)^{-1} = \frac{R_1^2R_2^2}{2(R_1^2+R_2^2+R_1R_2)}$$

Quindi:

$$\hat{x} = \frac{R_1^2R_2^2}{2(R_1^2+R_2^2+R_1R_2)} \left[\frac{I_1}{R_1} + \frac{I_2}{R_2} + \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) I\right]$$

La stima delle osservabili y è data da:

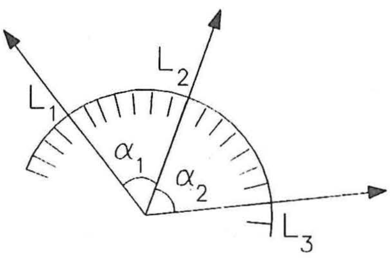
$$\hat{y} = A\hat{x} + a$$

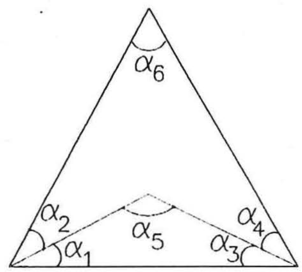
$$\hat{y} = \left[\frac{I_1}{R_1} + \frac{I_2}{R_2} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) I \right] \begin{bmatrix} \dfrac{R_1 R_2^2}{2(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)} \\ \\ \dfrac{R_1^2 R_2^2}{2(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)} \\ \\ \dfrac{R_1 R_2 (R_1 + R_2)}{2(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)} \end{bmatrix}$$

che coincidono con i risultati ottenuti svolgendo l'esercizio con il metodo precedente.

Esercizio 8.1.2

La misura di angoli in un piano è essenzialmente effettuata eseguendo letture su un cerchio graduato:





$$\begin{cases} \alpha_1 = L_2 - L_1 \\ \alpha_2 = L_3 - L_2 \end{cases}$$

Supponendo che le letture L_i siano indipendenti ed abbiano uguale precisione, si ha che due angoli adiacenti hanno covarianza

$$C_{\alpha\alpha} = \sigma_L^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \sigma_\alpha^2 \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad (\sigma_\alpha^2 = 2\sigma_L^2) \ .$$

Se si effettuano le osservazioni degli angoli segnati in figura, si vede che il vettore delle osservabili, $y^+ = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6]$ ha matrice di covarianza

$$C_{YY} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tenendo conto di tale covarianza e supposto che gli angoli osservati siano (in gon [4]):

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 50.9712 \;; & \alpha_2 = 13.0014 \;; & \alpha_3 = 52.1568 \\ \alpha_4 = 11.3131 \;; & \alpha_5 = 96.8727 \;; & \alpha_6 = 72.5572 \end{array}$$

si trovino i valori compensati $\hat{y}$ e la stima di $\hat{\sigma}_0^2$, utilizzando pure equazioni di condizione.

Svolgimento

Si risolve il problema con il metodo dei minimi quadrati con equazioni di condizione, che risultano essere:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 = 200 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6 = 200 \end{cases}$$

In forma matriciale il problema si può scrivere: $By = b$, dove

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 200 \\ 200 \end{bmatrix}$$

[4]Si ricorda che

$$\alpha(\text{gon}) : \alpha(\text{rad}) = 400 : 2\pi$$

I valori compensati $\hat{y}$ sono dati da:

$$\hat{y} \;=\; Y_0 - QB^{+}(BQB^{+})^{-1}(BY_0 - b)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & & & & \\ -0.5 & 1 & & & & \\ & & 1 & -0.5 & & \\ & & -0.5 & 1 & & \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 50.9712 \\ 13.0014 \\ 52.1568 \\ 11.3131 \\ 96.8727 \\ 72.5572 \end{bmatrix}$$

$$U = BY_0 - b = \begin{bmatrix} 7 \cdot 10^{-4} \\ -3 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$K = BQB^{+} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$K^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(QB^{+})(BQB^{+})^{-1}(BY_0 - b) = \begin{bmatrix} 2.0 \\ -2.5 \\ 2.0 \\ -2.5 \\ 3.0 \\ -2.0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} = Y_0 - \hat{y}$$

I valori compensati risultano essere:

$\hat{\alpha}_1 = 50.971000$; $\hat{\alpha}_2 = 13.001550$; $\hat{\alpha}_3 = 52.156600$;
$\hat{\alpha}_4 = 11.313350$; $\hat{\alpha}_5 = 96.872400$; $\hat{\alpha}_6 = 72.557400$.

Calcolo della stima di σ_0^2:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{r}(U^+K^{-1}U)$$

dove r è il numero di equazioni di condizione.

Risulta:

$$U^+K^{-1}U = 27 \cdot 10^{-8}$$

Quindi:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{27}{2} \cdot 10^{-8} = 13.5 \cdot 10^{-8}$$

$$\hat{\sigma}_0 = 3.6742 \cdot 10^{-4}$$

Esercizio 8.1.3

Date le variabili Y e t legate tra loro dalla legge:

$$Y = a + ct^2 + bt + dt^3 \ ,$$

sono stati osservati i valori:

t_i	1	2	5	3	-1	-2	-5	-3
Y_i	0.08	-0.76	0.18	-0.11	-0.04	-0.48	-0.62	-1.92

Supposto che le osservazioni siano indipendenti e di ugual precisione, si determinino le stime minimi quadrati di $\hat{x}^+ = [\hat{a} \ \ \hat{c} \ \ \hat{b} \ \ \hat{d}], \sigma_0^2$ e della matrice di covarianza C_{xx}.

Svolgimento

Si tratta di un esempio di interpolazione polinomiale risolto mediante il metodo dei minimi quadrati. Ciò che si cerca è la stima dei coefficienti a, b, c, d di un polinomio di terzo grado. In questo esercizio i coefficienti sono stati posti nell'ordine a, c, b, d perché ne deriveranno delle simmetrie tali da semplificare i calcoli.

Modello con equazioni parametriche:

$$y = Ax + a \text{ (con } a = 0 \text{ nel caso in esame)}$$

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 0.08 \\ -0.76 \\ 0.18 \\ -0.11 \\ -0.04 \\ -0.48 \\ -0.62 \\ -1.92 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \\ 1 & 25 & 5 & 125 \\ 1 & 9 & 3 & 27 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & -8 \\ 1 & 25 & -5 & -125 \\ 1 & 9 & -3 & -27 \end{bmatrix}$$

$Q = I$ (poiché le osservazioni sono supposte indipendenti e di ugual precisione).

Stima di x:

$$\hat{x} = (A^+A)^{-1}A^+Y_0$$

$$A^+A = N = \begin{bmatrix} 8 & 78 & 0 & 0 \\ 78 & 1446 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 78 & 1446 \\ 0 & 0 & 1446 & 32838 \end{bmatrix}$$

Essendo N una matrice diagonale a blocchi, si invertono i singoli blocchi. Detti:

$$N_I = \begin{bmatrix} 8 & 78 \\ 78 & 1446 \end{bmatrix} \text{ e } N_{II} = \begin{bmatrix} 78 & 1446 \\ 1446 & 32838 \end{bmatrix}$$

$D_I = \det N_I = 8 \cdot 1446 - 78^2 = 5484$

$D_{II} = \det N_{II} = 78 \cdot 32838 - 1446^2 = 470448$

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1446}{D_I} & \frac{-78}{D_I} & 0 & 0 \\ \frac{-78}{D_I} & \frac{8}{D_I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{32838}{D_{II}} & \frac{-1466}{D_{II}} \\ 0 & 0 & \frac{-1466}{D_{II}} & \frac{78}{D_{II}} \end{bmatrix}$$

La stima dei coefficienti del polinomio risulta essere:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= -2640/D_I = -0.4814 \\ \hat{c} &= 12.74/D_I = 0.0023 \\ \hat{b} &= 83013.12/D_{II} = 0.1765 \\ \hat{d} &= -1553.04/D_{II} = -0.0033 \end{aligned}$$

Stima di $\hat{\sigma}_0^2$:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\varepsilon}^+ Q^{-1} \hat{\varepsilon}}{8-4} = \frac{\hat{\varepsilon}^+ \hat{\varepsilon}}{4}$$

$$\hat{\varepsilon} = Y_0 - \hat{y}$$

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} -0.3059 \\ -0.1456 \\ 0.0461 \\ -0.0203 \\ -0.6523 \\ -0.7988 \\ -0.8939 \\ -0.9011 \end{bmatrix} \qquad \hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0.3859 \\ -0.6144 \\ 0.1339 \\ 0.0897 \\ 0.6123 \\ 0.3188 \\ 0.2739 \\ -1.0189 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = 0.5355$$

$$\hat{\sigma}_0 = 0.7318$$

Stima della matrice di covarianza:

$$\hat{C}_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot N^{-1} = 0.5355 \cdot N^{-1}$$

Esercizio 8.1.4

Si sono eseguite quattro osservazioni Y_{0i} ($i = 1, 2, 3, 4$) della stessa grandezza, ottenendo:

$$Y_{01} = 3.86 \quad ; \qquad Y_{02} = 4.02 \quad ; \qquad Y_{03} = 3.93 \quad ; \qquad Y_{04} = 3.98$$

Supponendo che le osservazioni siano caratterizzate dalla stessa precisione e che le prime due siano indipendenti dalle altre due, mentre

$$\rho_{Y_{01}Y_{02}} = -0.5 \quad ; \qquad \rho_{Y_{03}Y_{04}} = -0.5 \ ,$$

si determini la stima a minimi quadrati di y e di σ_0^2.

Svolgimento

Si tratta di un problema di stima a minimi quadrati per il quale si può scrivere un modello di tipo parametrico:

$$y = Ax + a$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le equazioni d'osservazione sono cioé esplicitabili come:

$$\begin{aligned} Y_{01} &= 3.86 \\ Y_{02} &= 4.02 \\ Y_{03} &= 3.93 \\ Y_{04} &= 3.98 \end{aligned}$$

La soluzione sarà data da:

$$\hat{y} = (A^+ Q^{-1} A)^{-1} \ A^+ Q^{-1} Y_0$$

La matrice Q è data da:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Svolgendo i conti si ottiene:

$$\begin{aligned} &N = A^+ Q^{-1} A = 8.000 \\ &N^{-1} = \frac{1}{8} = 0.125 \\ &A^+ Q^{-1} Y_0 = 31.58 \\ &\hat{y} = 3.9475 \end{aligned}$$

Stima del vettore degli scarti:

$$\hat{\varepsilon} = Y_0 - \hat{y} = \begin{bmatrix} -0.0875 \\ 0.0725 \\ -0.0175 \\ 0.0325 \end{bmatrix}$$

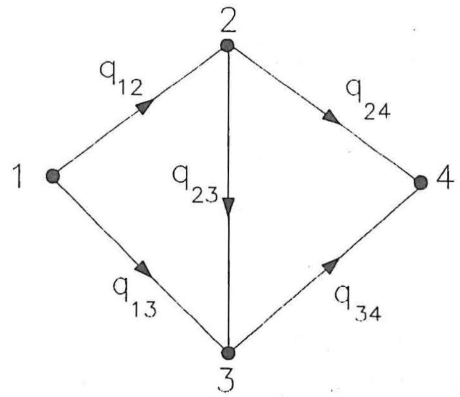
Stima del valore di σ_0^2:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\varepsilon}^+ Q^{-1} \hat{\varepsilon}}{n - m} = \frac{\hat{\varepsilon}^+ Q^{-1} \hat{\varepsilon}}{3} = \frac{0.009817}{3} = 0.003272$$

Esercizi

Esercizio 8.1.5

L'operazione di misura che permette di determinare il dislivello tra due punti si chiama livellazione. La rete di livellazione in figura è osservata ottenendo i valori:



$$Y_{01} = q_{12} = 2.853 \text{ cm}$$
$$Y_{02} = q_{23} = 4.967 \text{ cm}$$
$$Y_{03} = q_{13} = 7.825 \text{ cm}$$
$$Y_{04} = q_{24} = 8.426 \text{ cm}$$
$$Y_{05} = q_{34} = 3.452 \text{ cm}$$

Posto che le varianze di tutti i dislivelli siano uguali a σ_0^2, tranne quella del dislivello q_{23} che è 0.5 σ_0^2 (in quanto proveniente dalla media di due osservazioni), e supponendo che le misure siano indipendenti:

a) si compensino le osservazioni cercando, a partire da equazioni di condizione, le stime minimi quadrati $\hat{y}_i$ e $\hat{\sigma}_0^2$;

b) si scrivano le equazioni parametriche introducendo il vettore $x^+ = [Q_2, Q_3, Q_4](Q_i =$ quota del punto $i)$, supponendo che $Q_1 \equiv 0$; e si trovi la stima minimi quadrati di $\hat{x}, \hat{\sigma}_0^2, C_{\hat{x}\hat{x}}$;

c) si verifichi usando le equazioni del punto b) che $\hat{y} = A\hat{x}$ coincida con lo stimatore trovato al punto a), e che i due $\hat{\sigma}_0^2$ siano tra loro uguali.

Si noti che come equazioni di condizione si possono usare le chiusure dei due anelli 123, 243. Le equazioni di osservazione in forma parametrica si scrivono invece: $q_{ik} = Q_k - Q_i$.

[**R:** $\hat{y}^+ = [2.8545\ 4.9690\ 7.8235\ 8.4235\ 3.4545]$ cm ;
$\hat{x}^+ = [2.8545\ 7.8235\ 11.2780]$ cm ;
$\hat{\sigma}_0^2 = 1.25\ 10^{-5}\ \text{cm}^2$]

Esercizio 8.1.6

Un punto si muove di moto rettilineo uniforme lungo la retta intersezione dei piani:

$$X - 2Y + Z = 0$$
$$X + Y + Z = 1$$

Al tempo $t = 0$ il punto si trova in (0, 1/3, 2/3). Dopo 5 secondi si misurano le coordinate che risultano essere: (-9.0013, 0.3327, 9.6671). Le misure sono state eseguite in modo indipendente e con uguale precisione.

Stimare le componenti del vettore velocità con la loro matrice di covarianza.

[**R:** $\hat{v}_x = -1.8002$, $\hat{v}_y = 0.0000$, $\hat{v}_z = 1.8002$;
$\hat{\sigma}^2_{v_x} = \hat{\sigma}^2_{v_y} = \hat{\sigma}^2_{v_z} = 0.152\ 10^{-7}$]

Esercizio 8.1.7

Siano date due misure y_1 e y_2 della stessa quantità y e si considerino due possibili modelli di matrice di covarianza:

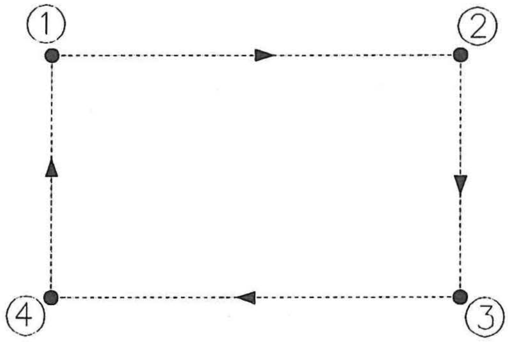
$$C_1(\varepsilon) = \hat{\sigma}_0^2 \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix} \qquad C_2(\varepsilon) = \hat{\sigma}_0^2 \begin{bmatrix} 1/\varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Determinare nei due casi la stima ai minimi quadrati $\hat{y}$ (sotto la condizione $y_2 = y_1$) in funzione di ε e in particolare i limiti per $\varepsilon \longrightarrow 0$ e per $\varepsilon \longrightarrow \infty$.

[**R:** Caso 1: $\hat{y} = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$; Caso 2: $\hat{y} = \dfrac{\varepsilon^2 y_1 + y_2}{1 + \varepsilon^2}$]

Esercizio 8.1.8

Si misurano i quattro dislivelli tra quattro punti disposti come nella seguente figura:



$$\begin{aligned} Y_{01} &= \text{dislivello } 1-2 = 1.021 \text{ m;} \\ Y_{02} &= \text{dislivello } 2-3 = 0.572 \text{ m;} \\ Y_{03} &= \text{dislivello } 3-4 = 0.435 \text{ m;} \\ Y_{04} &= \text{dislivello } 4-1 = -0.018 \text{ m.} \end{aligned}$$

Ricordando che per i valori teorici medi Y_i deve valere l'ovvia relazione che la somma di tutti i dislivelli sia zero, supposto che le variabili di errore siano indipendenti ed abbiano la stessa varianza, si derivi la stima minimi quadrati degli $\hat{y}_i$ (usando solo equazioni di condizione senza parametri) e dello scarto quadratico medio delle misure $\hat{\sigma}_0$.

[**R:** $\hat{Y}_i = 1.022, \ -0.571, \ -0.434, \ -0.017 \quad ; \quad \hat{\sigma}_0 = 2 \cdot 10^{-3}$]

Esercizio 8.1.9

Sono state effettuate le tre osservazioni:

Y_0	t
2.1	-1
0.9	0
2.0	1

Sapendo che vale la legge

$$Y = X_0 + X_1 t^2 \ ,$$

e che i valori osservati sono affetti da errori indipendenti e di uguale varianza, si dia la stima minimi quadrati dei parametri X_0 e X_1 e della loro matrice di covarianza.

Si dia inoltre una stima di $Y(t=2)$ e della sua varianza.

[**R:** $\hat{X}_0 = 0.90$; $\hat{X}_1 = 1.15$; $C_{\hat{X}\hat{X}} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 7.5 \end{bmatrix} 10^{-3}$;
$\hat{y}(t=2) = 5.5$; $\hat{\sigma}_{\hat{y}}^2 = 0.085$]

Esercizio 8.1.10

Si sono osservati quattro valori di una grandezza w legata a due grandezze x, y dalla relazione

$$w = c_1 x + c_2 y \ ,$$

in corrispondenza di quattro coppie di valori (x, y):

x	y	w
1	3	4.9
2	1	4.1
0	4	3.5
3	2	5.5

Si dia una stima, con il metodo dei minimi quadrati, delle due costanti c_1 e c_2 e della loro matrice di covarianza, sapendo che le osservazioni sono state eseguite in modo indipendente e con uguale precisione.

[**R:** $\hat{c}_1 = 1.3585$; $\hat{c}_2 = 0.9619$; $\hat{\sigma}_0^2 = 0.4888$]

Esercizio 8.1.11

Siano y_1 e y_2 due grandezze che evolvono linearmente nel tempo e sono entrambe nulle per $t = 0$. La grandezza y_1 è misurata agli istanti $t = 1$ e $t = 3$; la grandezza y_2 è misurata all'istante $t = 3$. Inoltre si misura la differenza $y_2 - y_1$ all'istante $t = 4$. I valori corrispondenti sono riportati in tabella:

t	Y_0
1	0.4998
3	1.4998
3	-2.4001
4	-5.1994

Si suppone che le misure siano tra di loro indipendenti e che la loro varianza sia proporzionale a t.

Fornire la stima della differenza $y_5 = (y_2 - y_1)$ all'istante $t = 5$ con la sua varianza.

[**R:** $\hat{y}_5 = -6.4994$; $\hat{\sigma}^2_{(\hat{y}_5)} = 4.74 \cdot 10^{-8}$]

Esercizio 8.1.12

Per misurare il valore assoluto della gravità si lascia cadere, sotto vuoto, un peso misurando le distanze percorse a intervalli di tempo prefissati. Si suppone che la legge che lega tempi e distanze sia semplicemente

$$d = \frac{1}{2}\, gt^2 \ .$$

Sulla base dei valori osservati di d in funzione del tempo t:

t_i (sec)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
d_i (cm)	4.89754	19.59027	44.07803	78.36074	122.43908

(supposto che le misure siano indipendenti e di ugual precisione) si trovi la stima minimi quadrati di $\hat{g}$ ed il suo scarto quadratico medio.

[**R:** $\hat{g} = 979.5117$ cm/s^2 ; $\hat{\sigma}_{\hat{g}} = 0.000742$ cm/s^2]

Esercizio 8.1.13

Una popolazione batterica ha una legge di accrescimento della forma

$$N = B + Ce^t \ .$$

Si sono osservati i seguenti valori

t	N
0	1000
1	1300
2	1810

Si dia la stima minimi quadrati dei parametri B e C e dei relativi scarti quadratici medi, supponendo che le osservazioni siano tutte indipendenti ed affette dallo stesso errore.

[**R:** $\hat{B} = 914.3082$; $\hat{C} = 123.0897$; $\hat{\sigma}_B = 63.5157$; $\hat{\sigma}_C = 13.8617$]

Esercizio 8.1.14

Nello studio del comportamento elastico di un filo metallico si nota che l'allungamento $Y = \delta L/L$ del filo risulta proporzionale alla tensione T, (fino a che non viene raggiunto un valore critico). In un esperimento si è ottenuta la seguente tabella di valori (in opportune unità di misura):

T	Y_0
2	1.9
4	3.8
6	6.1
8	7.8
10	11.9

Ipotizzato il modello

$$Y_i = aT_i + \nu_i$$

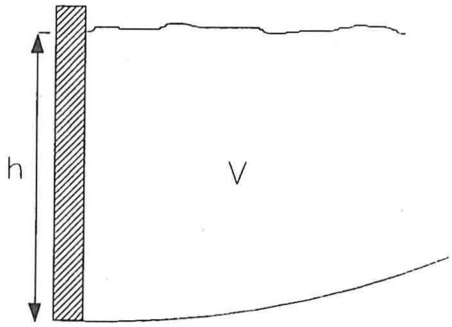
con ν_i indipendenti e di uguale varianza, si dia la stima a minimi quadrati del coefficiente a e di σ_0^2.

[**R:** $\hat{a} = 1.0773$; $\hat{\sigma}_0^2 = 0.5991$]

Esercizio 8.1.15

Sbarrando una diga e svuotandola in modo controllato si può costruire il diagramma del volume contenuto, corrispondente ad una certa altezza

h dell'invaso misurata lungo la struttura.



I valori ottenuti sono i seguenti (h in metri, V in milioni di m^3):

h_i	V_i
50	4.50
40	3.69
30	2.80
20	1.91

Da tali valori si vuole ricavare una curva empirica del tipo $V = ph - qh^2$; supponendo che le osservazioni siano tali che

$$V_{0i} = ph_i - qh_i^2 + \nu_i$$

con scarti ν_i indipendenti e di uguale varianza:

a) si determinino le stime a minimi quadrati di p e q;

b) si trovi σ_0^2 e la matrice di covarianza di p e q;

c) si dia una predizione del valore V_{25} per $h = 25$ m e si trovi la varianza di tale valore.

[**R:** $\hat{p} = 0.0990$; $\hat{q} = 0.0002$; $\hat{\sigma}_0^2 = 1.70 \cdot 10^{-4}$; $\hat{V}_{25} = 2.3644$ $\hat{\sigma}_{\hat{V}}^2 = 8.0 \cdot 10^{-5}$]

Esercizio 8.1.16

Nell'analisi della funzionalità epatica si effettuano misure delle quantità F, C_1, C_0 (che hanno il significato di flusso sanguigno e concentrazione di una sostanza prima e dopo il passaggio per il fegato).

Si supponga che i valori osservati siano (in opportune unità di misura):

	F	σ_F	C_1	C_0
1	679	46	305	82
2	629	35	1221	607
3	859	44	3088	2309
4	727	100	6747	5673

F è misurata con errori di misura indipendenti pari a σ_F; C_1 e C_0 sono misurate praticamente senza errore. Tali quantità sono legate tra loro e con due parametri x_1, x_2 di interesse fisiologico, dalla legge

$$\frac{1}{F} = x_1(C_1 - C_0) + x_2 \ln \frac{C_1}{C_0} \; .$$

Si determini la stima a minimi quadrati di $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

Si suggerisce di considerare come vettore delle osservabili $y_i = \frac{1}{F_i}$ e di ricavare dai dati la corretta C_{yy}.

[**R:** $\hat{x}_1 = 1.18\ 10^{-6}$; $\hat{x}_2 = 985.89\ 10^{-6}$]

Esercizio 8.1.17

Un carrello si muove con velocità uniforme lungo un binario e viene tracciato per mezzo di un'onda elettromagnetica di lunghezza d'onda $\lambda = 2$ cm. Sul carrello è posta un'antenna che riceve in continuo e campiona la fase ogni secondo. La posizione iniziale x_0 è nota e risulta essere: $x_0 = 100$ cm. Misurando le fasi ai tempi $t = 0s, 1s, 2s$ si osservano le distanze percorse dal carrello che, espresse in centimetri, sono:

t	$D(=\varphi\lambda/2\pi)$
0	0.001
1	4.003
2	7.998

Le fasi sono misurate indipendentemente e con $\sigma = 0.02$ cm. L'equazione di osservazione è:

$$D(t) = x_0 + vt - N_0\lambda$$

dove N_0 è il numero intero iniziale di lunghezze d'onda rispetto a cui è misurata la fase.

a) Si determini la stima minimi quadrati di v e di N_0 e dei loro scarti quadratici medi (si noti che σ_0 è già noto a priori senza errore e non va ristimato);

b) supponendo che N_0 debba essere intero, si verifichi che lo stimatore $\hat{N}_0$ sia in un intervallo fiduciario di un intero con livello di significatività $\alpha = 5\%$.

[**R:** $\hat{v} = 3.9985$; $\hat{N}_0 = 49.9989$; $\hat{\sigma}_v = 1.4142 \cdot 10^{-2}$; $\hat{\sigma}_{N_0} = 0.9129 \cdot 10^{-2}$]

Esercizio 8.1.18

Nella taratura di due orologi si osservano le differenze τ_i tra le letture simultanee degli orologi stessi; si sa che i valori medi di tali differenze seguono una legge quadratica

$$\tau_i = a + bt_i + ct_i^2$$

a cui va aggiunto un rumore ν_i indipendente e di varianza costante

$$\tau_{i0} = a + bt_i + ct_i^2 + \nu_i \; .$$

Sapendo che sono state effettuate le seguenti misure

t_i (s)	τ_{i0} (ns)
-2	-2.3
-1	-0.9
1	3.4
2	0.8

si dia una stima di minimi quadrati di $x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ e del valore di σ_0^2.

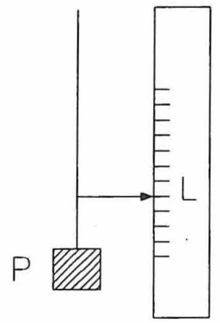
[**R:** $\hat{x}^+ = [1.9167 \;\; 1.0500 \;\; -0.6667]$; $\hat{\sigma}_0^2 = 3.025$]

8.2 Regressione lineare

Problemi risolti

Esercizio 8.2.1

Un materiale elastico viene sottoposto a prove di trazione per determinarne le caratteristiche.



Posto a confronto con un regolo graduato, si hanno le seguenti letture di lunghezza L_i per ogni peso P_i applicato:

P_i (kg)	1	2	3	4	5
L_i (cm)	2.61	3.26	3.34	4.00	4.34

Supponendo che, a meno di piccole oscillazioni casuali, la relazione tra L e P sia lineare:

$$L = \overline{L} + kP \ ,$$

dove $\overline{L}$ ha il significato dell'origine della scala delle letture, mentre k è la costante elastica ricercata, si trovino le stime minimi quadrati di $x^+ = [\overline{L}, k]$, nonché la stima di $\hat{\sigma}_0^2$.

Svolgimento

Si tratta di un'applicazione della regressione lineare semplice. Il modello è:

$$y_i = b_0 + b_1 \xi_i$$

e nel caso in esame:

$$L_i = \overline{L} + kP_i \ .$$

Il sistema completo si scrive:

$$\begin{cases} 2.61 = \overline{L} + k \cdot 1 \\ 3.26 = \overline{L} + k \cdot 2 \\ 3.34 = \overline{L} + k \cdot 3 \\ 4.00 = \overline{L} + k \cdot 4 \\ 4.34 = \overline{L} + k \cdot 5 \end{cases}$$

Si ricorda che si semplificano i conti riconducendosi alla condizione: $\sum_i \xi_i = 0$; si opera quindi la traslazione:

$$\xi_i = P_i - \overline{P} = P_i - 3$$

che porta ad avere:

$$\xi = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

L'equazione di base diventa allora:

$$\begin{aligned} L_i = \overline{L} + kP_i &= \overline{L} + k(\xi_i + 3) = \\ &= \overline{L} + k\xi_i + 3k = \\ &= (\overline{L} + 3k) + k\xi = \\ &= b_0 + b_1\xi \end{aligned}$$

Il sistema diventa:

$$\begin{cases} 2.61 = b_0 - 2b_1 \\ 3.26 = b_0 - b_1 \\ 3.34 = b_0 \\ 4.00 = b_0 + b_1 \\ 4.34 = b_0 + 2b_1 \end{cases}$$

dove:

$$\begin{cases} b_0 = \overline{L} + 3k \\ b_1 = k \end{cases}$$

Si ricava la stima di x:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \end{bmatrix} = (A^+A)^{-1}A^+Y_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\sum_i y_i \\ \\ \frac{\sum_i y_i \xi_i}{\sum_i \xi_i^2} \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$\hat{b}_0 = 3.510$$
$$\hat{b}_1 = 0.420 = \hat{k}$$

$$\hat{\overline{L}} = \hat{b}_0 - 3\hat{k} = 2.25$$

Il modello è perciò dato da:

$$L = 2.25 + 0.42P$$

Per il calcolo della varianza si utilizza il teorema di decomposizione degli scarti:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{S_G^2 - S_S^2}{n-2} = \frac{S_G^2 - S_S^2}{3}$$

con:

$$S_G^2 = \sum_{i=1}^{5}(y_{0i} - \overline{y})^2 = \sum_{i=1}^{5}(y_{0i} - 3.51)^2 = 1.8304$$
$$S_S^2 = \hat{b}_1^2 \sum_i \xi_i^2 = (0.420)^2 \cdot 10 = 1.7640$$

quindi: $\hat{\sigma}_0^2 = 0.022133$.

Stima di $\hat{\sigma}_{\hat{k}}^2$ e $\hat{\sigma}_{\hat{\overline{L}}}^2$:

$$\hat{b}_1 = \hat{k}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{b}_1}^2 = \hat{\sigma}_{\hat{k}}^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{10} = 0.002213$$

$$\hat{\overline{L}} = \hat{b}_0 - 3\hat{b}_1$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\overline{L}}}^2 = 1 \cdot \hat{\sigma}_{\hat{b}_0}^2 + 9\hat{\sigma}_{\hat{b}_1}^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{n} + \frac{9\hat{\sigma}_0^2}{\sum \xi_i^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{5} + \frac{9}{10}\hat{\sigma}_0^2 = \frac{11}{10}\hat{\sigma}_0^2 = 0.02435$$

Esercizio 8.2.2

Nelle operazioni di controllo di una struttura si misurano le quote di un punto per 6 volte con intervalli di due mesi per verificare gli eventuali movimenti di assestamento del punto stesso. Poiché però si sa che la figura geometrica della struttura dipende anche dalla sua temperatura, contestualmente alla misura della quota si fa una lettura di temperatura. Si ipotizza che valga un modello di regressione lineare del tipo:

$$Q = c_0 + c_1 t + c_2 g \quad (Q = \text{ quota, } t = \text{ tempo, } g = \text{ temperatura})$$
$$Q_{0i} = Q_i + \varepsilon_i$$
$$C_{\varepsilon\varepsilon} = \sigma_0^2 I \ .$$

I dati ottenuti sono:

t (mesi)	g (°C)	Q (mm)
2	4.8	127.02
4	9.3	129.22
6	12.5	130.98
8	19.2	133.74
10	10.9	129.98
12	5.2	127.01

Stimare i parametri c_0, c_1 e c_2 del modello.

Dare inoltre la predizione e l'errore relativo di Q per $t = 7$ e $g = 15$°C.

Svolgimento

Si tratta di una regressione lineare multipla. Come prima cosa è opportuno traslare l'origine delle variabili concomitanti in modo tale che esse abbiano valore medio nullo. Si introducono quindi le variabili:

$$\begin{cases} \tau = t - \bar{t} \\ \vartheta = g - \bar{g} \end{cases}$$

dove:

$$\bar{t} = 7 \quad ; \quad \bar{g} = 10.31667$$

e si forma il modello:

$$Y = Q = C_0 + C_1\tau + C_2\vartheta$$

$$T = \begin{bmatrix} -5 & -5.5167 \\ -3 & -1.0167 \\ -1 & 2.1833 \\ 1 & 8.8833 \\ 3 & 0.5833 \\ 5 & -5.1167 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}_0 = \overline{C}_0 = \overline{Y} = 129.6583$$

$$\hat{x} = C_{tt}^{-1} C_{ty} = \left[\frac{1}{n}(T^+T)\right]^{-1} \left[\frac{1}{n}(T^+Y_0)\right]$$

$$C_{tt} = \frac{1}{n}(T^+T) = \begin{bmatrix} 11.666667 & 2.250000 \\ 2.250000 & 23.611389 \end{bmatrix}$$

$$C_{tt}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.087319 & -0.008321 \\ -0.008321 & 0.043145 \end{bmatrix}$$

$$C_{ty} = \frac{1}{n}(T^+Y_0) = \begin{bmatrix} 0.831667 \\ 11.313818 \end{bmatrix} = 0.831667$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 \\ \hat{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.021522 \\ 0.481214 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0215 \\ 0.4812 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{U^+U}{n-p-1} = \frac{S_R^2}{n-p-1} = \frac{S_G^2 - \hat{x}C_{ty}n}{3} = 0.0393$$

essendo: n = numero di equazioni, p = numero parametri stimati.

$$\hat{\sigma}_0 = 0.198387$$

Stima della matrice di covarianza dei parametri:

$$\hat{\sigma}_{\hat{x}_0}^2 = \frac{\sigma_0^2}{6} = 0.006560$$

$$C_{\hat{x}\hat{x}} = 0.00656 \begin{bmatrix} 0.087319 & -0.008321 \\ -0.008321 & 0.043145 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_{C_1}^2 = 0.000573 \\ \hat{\sigma}_{C_2}^2 = 0.000283 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_{C_1} = 0.023933 \\ \hat{\sigma}_{C_2} = 0.016823 \end{cases}$$

Per la predizione del valore $Q(t = 7, \ g = 15)$ si ha:

$$\tau = t - \bar{t} = 0$$

$$\vartheta = g - \overline{g} = 4.683333$$

$$\hat{Q} = 131.911985$$

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{Q}} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{6} \left\{ 1 + [\tau \quad \vartheta] C_{tt}^{-1} \begin{bmatrix} \tau \\ \vartheta \end{bmatrix} \right\} = 0.012748$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{Q}} = 0.112909 \text{ mm}$$

Esercizi

Esercizio 8.2.3

Il costo totale delle materie prime (t) ed il fatturato (Y) di un'industria nel quinquennio 1985-89 sono stati:

Anno	t	Y
1985	25	180
1986	35	200
1987	40	215
1988	45	230
1989	55	245

Determinare la retta di regressione:

$$Y = C_0 + C_1 t$$

e la stima di σ_0^2, $\sigma_{C_0}^2, \sigma_{C_1}^2$.

[**R:** $\hat{C}_0 = 124$; $\hat{C}_1 = 2.25$; $\hat{\sigma}_0^2 = 12.9167$; $\hat{\sigma}_{C_0}^2 = 43.9161$; $\hat{\sigma}_{C_1}^2 = 0.0258$]

Esercizio 8.2.4

Si vuole verificare se ad un fenomeno ad andamento approssimativamente sinusoidale: $f_S = \sin \pi x$, si sovrappone un piccolo trend lineare: $y = ax + b$. A tale scopo si eseguono quattro misure $(\nu_0)_i$ in corrispondenza di altrettanti punti x_i:

x_i	$(\nu_0)_i$
0.25	0.707
0.50	1.006
0.75	0.703
1.00	-0.018

Stimare i coefficienti del trend lineare e le rispettive varianze.

[**R:** $\hat{a} = -255.14 \cdot 10^{-4}$; $\hat{b} = 118.93 \cdot 10^{-4}$; $\hat{\sigma}_a^2 = 1.72 \cdot 10^{-4}$; $\hat{\sigma}_b^2 = 0.81 \cdot 10^{-4}$]

Esercizio 8.2.5

Dato il modello di regressione lineare multipla

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

stimare i parametri ed i rispettivi scarti quadratici medi in base ai valori ottenuti dalle seguenti osservazioni:

x_1	x_2	Y_0
-1.0000	-1.0000	85.3
1.0000	1.0000	72.3
0	1.2154	71.4
0	-1.2154	72.0
-1.0000	-1.0000	87.0
1.0000	1.0000	55.6
0	0	85.0
1.2154	0	70.9
0	0	68.0
-1.2154	0	89.6

Si supponga che le osservazioni siano state eseguite con la stessa precisione e in modo indipendente.

[**R:** $\hat{b}_0 = 75.71$; $\hat{b}_1 = -8.8469$; $\hat{b}_2 = -1.4008$; $\hat{\sigma}_{b_0} = 2.3070$; $\hat{\sigma}_{b_1} = \hat{\sigma}_{b_2} = 3.3817$]

Esercizio 8.2.6

Data la legge fisica

$$y = c_0 + c_1 t + c_2 T$$

si stimino (usando la teoria della regressione lineare) i parametri c_0, c_1, c_2 e le loro varianze a partire dalle seguenti osservazioni:

t	T	Y_0
3	0	54.33
6	-2	54.28
9	1	55.01
12	1	54.64

[**R:** $\hat{c}_0 = 54.3615$; $\hat{c}_1 = 0.0271$; $\hat{c}_2 = 0.1410$; $\hat{\sigma}^2_{c_0} = 0.2417$;
$\hat{\sigma}^2_{c_1} = 0.0038$; $\hat{\sigma}^2_{c_2} = 0.0283$]

Esercizio 8.2.7

Dato il modello matematico:

$$y = a + b\sqrt{t} + ct \ ,$$

si sono osservati, in modo indipendente e con uguale precisione, i seguenti valori di y al variare di t:

t	Y_0
4	0.161
9	0.312
16	0.543
25	0.833

Stimare i parametri della regressione e la loro matrice di covarianza.

[**R:** $\hat{a} = 0.0581$; $\hat{b} = -0.0186$; $\hat{c} = 0.0348$; $\hat{\sigma}^2_0 = 0.22 \cdot 10^{-4}$]

Esercizio 8.2.8

Un veicolo percorre una strada e si sa che, nel tratto di percorso che interessa, la legge del moto è della forma

$$s = a \ln t + bt + c \ ,$$

dove s è lo spazio percorso in km, t il tempo in ore. In determinati istanti (noti esattamente) vengono eseguite misure indipendenti e di uguale precisione della posizione lungo il percorso. I risultati sono riportati in tabella:

t	s
2.0	9.659
2.5	17.063
3.0	22.428
3.5	26.392
4.0	29.315

Dare una stima dei coefficienti a, b, c e predire la posizione del veicolo al tempo $t = 5$ con la sua varianza.

[**R:** $\hat{a} = 49.9734$; $\hat{b} = -7.4903$; $\hat{c} = -10.0002$; $\hat{s}(t = 5) = 32.9772$; $\hat{\sigma}_s^2 = 0.96 \cdot 10^{-4}$]

Esercizio 8.2.9

L'evoluzione temporale di un fenomeno fisico è descritta dal modello

$$Y = a_0 + a_1 \cos(\pi t) + a_2 \cos(\frac{\pi}{2} t) \ .$$

Le misure disponibili di Y, eseguite indipendentemente e con la stessa precisione, sono:

t	Y_0
0.00	-4.9874
0.25	-2.8117
0.75	7.4161
1.00	9.0439

Stimare i coefficienti del modello e determinare la loro matrice di covarianza (tralasciando il calcolo della stima di σ_0^2). Predire il valore di Y per $t = 7/4$ e determinare la sua varianza.

Si suggerisce di traslare l'origine per i coefficienti del parametro a_2.

[**R:** $\hat{a}_0 = 1.1252$; $\hat{a}_1 = -7.9191$; $\hat{a}_2 = 1.8036$; $\hat{Y}(t = 7/4) = -6.1407$;
$\hat{\sigma}_{\hat{Y}}^2 = 48.2806 \cdot \hat{\sigma}_0^2$]

8.3 Minimi quadrati non lineari

Problemi risolti

Esercizio 8.3.1

Sia dato il modello non lineare:

$$Y = \alpha t\ e^{-\beta t^2}$$

e si supponga di aver misurato quattro volte Y in corrispondenza di altrettanti istanti di tempo t:

t	Y_0
1	0.5863
2	0.2606
3	0.0342
4	0.0021

Si sa che le osservazioni sono state eseguite in maniera indipendente e che la loro precisione è data da:

$$\sigma_{Y_i}^2 = \frac{\sigma_0^2}{1 + t_i^2} \ .$$

Si stiminino i parametri α, β e il valore di σ_0^2 sapendo che i valori approssimati dei parametri sono $\tilde{\alpha} = 1.0,\ \tilde{\beta} = 0.5$.

Svolgimento

Poiché il modello dato è non lineare nei parametri α, β:

$$Y = \alpha\ t\ e^{-\beta t^2} = f(\alpha, \beta)$$

si linearizza l'equazione intorno ai valori approssimati $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ nel modo seguente:

$$\tilde{y} + \delta y = f(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) + \left.\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right|_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} (\alpha - \tilde{\alpha}) + \left.\frac{\partial f}{\partial \beta}\right|_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} (\beta - \tilde{\beta})$$

Ponendo:

$$\begin{aligned}
&\tilde{y} = Y_0 \\
&\delta y = 0 \\
&\alpha - \tilde{\alpha} = \delta\alpha \\
&\beta - \tilde{\beta} = \delta\beta
\end{aligned}$$

si ottiene una equazione lineare in $\delta\alpha, \delta\beta$:

$$Y_0 = \left.\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right|_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \delta\alpha + \left.\frac{\partial f}{\partial \beta}\right|_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \delta\beta + f(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$$

$$Y_0 = (te^{-\tilde{\beta}t^2})\delta\alpha + (\tilde{\alpha}t^3 e^{-\tilde{\beta}t^2})\delta\beta + \tilde{\alpha}te^{-\tilde{\beta}t^2}$$

che corrisponde al modello:

$$Y_0 = A\xi + d$$

dove:

$$\xi = \begin{bmatrix} \delta\alpha \\ \delta\beta \end{bmatrix} \quad ; \quad d = f(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$$

A è come al solito la matrice "disegno" e in questo caso contiene le derivate della funzione f; ξ è il vettore delle variazioni dei parametri α, β rispetto ai valori approssimati e la sua stima a minimi quadrati si ottiene tramite la formula:

$$\hat{\xi} = (A^+ Q^{-1} A)^{-1} \; A^+ Q^{-1} (Y_0 - d)$$

Inserendo i valori numerici si ha:

$$A = \begin{bmatrix} 0.606531 & -0.606531 \\ 0.270671 & -1.082682 \\ 0.033327 & -0.299943 \\ 0.001342 & -0.021470 \end{bmatrix}$$

$$Y_0 - d = \begin{bmatrix} 0.5863 - 0.606531 \\ 0.2606 - 0.270671 \\ 0.0342 - 0.033327 \\ 0.0021 - 0.001342 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.020231 \\ -0.010071 \\ 0.000873 \\ 0.000758 \end{bmatrix}$$

Inoltre dalle informazioni sulla precisione delle osservazioni si ricava la matrice Q:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{17} \end{bmatrix} \quad ; \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}$$

Si calcola poi:

$$N = A^+ Q^{-1} A = \begin{bmatrix} 1.113211 & -2.301465 \\ -2.301465 & 7.504256 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = (A^+ Q^{-1} A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2.454712 & 0.752831 \\ 0.752831 & 0.364142 \end{bmatrix}$$

$$A^+ Q^{-1} (Y_0 - d) = \begin{bmatrix} -0.037863 \\ 0.076165 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \delta\hat{\alpha} \\ \delta\hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.035603 \\ -0.000770 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\alpha} = \tilde{\alpha} + \delta\hat{\alpha} = 1.0 - 0.035603 = 0.964397$$

$$\hat{\beta} = \tilde{\beta} + \delta\hat{\beta} = 0.5 - 0.000770 = 0.499230$$

Stima degli scarti delle equazioni:

$$\hat{\varepsilon} = -A\hat{\xi} + (Y_0 - d)$$

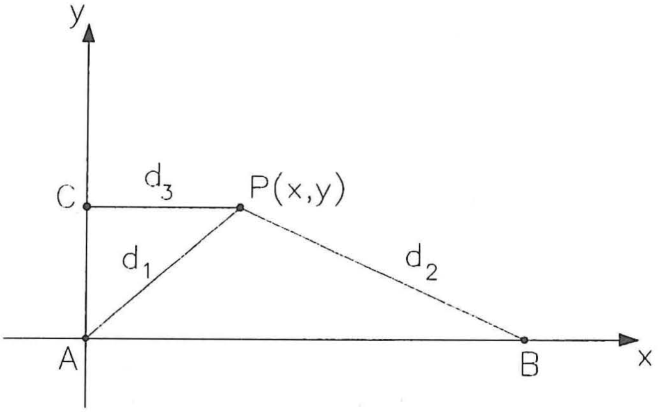
$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0.021127 - 0.020231 \\ 0.008803 - 0.010071 \\ 0.000956 + 0.000873 \\ 0.000064 + 0.000758 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000896 \\ -0.001268 \\ 0.001829 \\ 0.000822 \end{bmatrix}$$

Stima di σ_0^2:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\varepsilon}^+ Q^{-1} \hat{\varepsilon}}{n - m} = \frac{\hat{\varepsilon}^+ Q^{-1} \hat{\varepsilon}}{2} = 0.000027$$

Esercizio 8.3.2

Le coordinate piane (x, y) di un punto P (vedi figura) sono determinate tramite le distanze da tre punti di coordinate note: $A(0,0)$, $B(30,0)$, $C(0,10)$.



Le distanze osservate (in metri) sono:

$$Y_0 = \begin{bmatrix} d_{01} \\ d_{02} \\ d_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.142 \\ 22.361 \\ 10.002 \end{bmatrix}$$

Supposto che le misure siano indipendenti e di ugual precisione, si determinino le stime minimi quadrati di x, y nonché la loro matrice di covarianza. Le coordinate approssimate di P sono $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (10{,}10)$.

Svolgimento

È un caso non lineare di minimi quadrati. Le equazioni di osservazione sono:

$$\begin{cases} d_1 = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} \\ d_2 = \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2} \\ d_3 = \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2} \end{cases}$$

Linearizzando le equazioni attorno ai valori approssimati $(\tilde{x}, \tilde{y})$ si ottiene:

$$\begin{cases} d_1 = \tilde{d}_1 + \dfrac{\tilde{x}-\tilde{x}_A}{\tilde{d}_1}\delta x + \dfrac{\tilde{y}-\tilde{y}_A}{\tilde{d}_1}\delta y \\ d_2 = \tilde{d}_2 + \dfrac{\tilde{x}-\tilde{x}_B}{\tilde{d}_2}\delta x + \dfrac{\tilde{y}-\tilde{y}_B}{\tilde{d}_2}\delta y \\ d_3 = \tilde{d}_3 + \dfrac{\tilde{x}-\tilde{x}_C}{\tilde{d}_3}\delta x + \dfrac{\tilde{y}-\tilde{y}_C}{\tilde{d}_3}\delta y \end{cases}$$

Il problema è riconducibile alla forma:

$$D\eta = A\xi + d$$

con:

$$\xi = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} \text{ (parametri)} \quad ; \quad \eta = \begin{bmatrix} \delta d_1 \\ \delta d_2 \\ \delta d_3 \end{bmatrix} \text{(osservabili)}$$

$$D = -I \quad ; \quad \eta_0 = d_0 - \tilde{d} \quad ; \quad d = 0$$

$$\tilde{d}_1 = \sqrt{10^2 + 10^2} \quad = 10\sqrt{2}$$

$$\tilde{d}_2 = \sqrt{20^2 + 10^2} \quad = 10\sqrt{5}$$

$$\tilde{d}_3 = \sqrt{10^2} \qquad = 10$$

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\tilde{x}-\tilde{x}_A}{\tilde{d}_1} & \dfrac{\tilde{y}-\tilde{y}_A}{\tilde{d}_1} \\ \\ \dfrac{\tilde{x}-\tilde{x}_B}{\tilde{d}_2} & \dfrac{\tilde{y}-\tilde{y}_B}{\tilde{d}_2} \\ \\ \dfrac{\tilde{x}-\tilde{x}_C}{\tilde{d}_3} & \dfrac{\tilde{y}-\tilde{y}_C}{\tilde{d}_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \dfrac{-2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\eta_0 = \begin{bmatrix} d_{01} - \tilde{d}_1 \\ d_{02} - \tilde{d}_2 \\ d_{03} - \tilde{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.3562 \\ 3.2023 \\ 20.0000 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

La soluzione è data da:

$$\hat{\xi} = (A^+Q^{-1}A)^{-1}A^+Q^{-1}(D\eta_0 - d) = (A^+A)^{-1}A^+(-\eta_0)$$

$$A^+A = \begin{bmatrix} 2.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$(A^+A)^{-1} = \frac{1}{1.6}\begin{bmatrix} 0.7 & -0.1 \\ -0.1 & 2.3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} 7.0478 \\ -0.3310 \end{bmatrix} 10^{-4} = \begin{bmatrix} \delta\hat{x} \\ \delta\hat{y} \end{bmatrix}$$

Quindi le stime dei parametri risultano essere:

$$\hat{x} = \tilde{x} + \delta\hat{x} = 10.000705 \text{ m}$$
$$\hat{y} = \tilde{y} + \delta\hat{y} = 9.999967 \text{ m}$$

Stima di σ_0^2 e della matrice di covarianza:

$$\hat{\varepsilon} = D\eta_0 - A\hat{\xi} - d = \begin{bmatrix} -6.1057 \\ 9.6541 \\ 12.9522 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\varepsilon}^+ Q^{-1}\hat{\varepsilon}}{r-n} = \frac{\hat{\varepsilon}^+\hat{\varepsilon}}{3-2} = \hat{\varepsilon}^+\hat{\varepsilon} = 2.9829\ 10^{-6}$$

$$C_{\hat{\xi}\hat{\xi}} = 2.9829 \cdot 10^{-6}(A^+A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.3048 & -0.1864 \\ -0.1864 & 4.2872 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

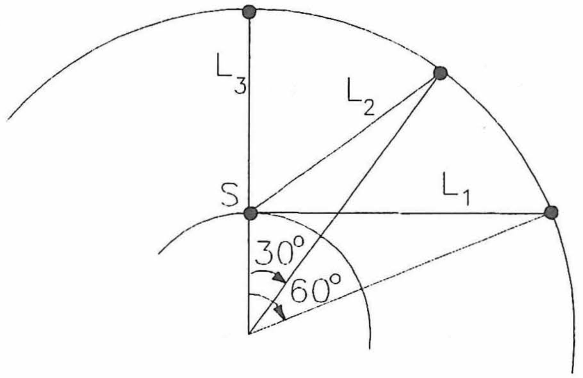
$$\hat{\sigma}_{\hat{x}}^2 = 1.3048 \cdot 10^{-6} \qquad \hat{\sigma}_{\hat{x}} = 1.1423 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{y}}^2 = 4.2872 \cdot 10^{-6} \qquad \hat{\sigma}_{\hat{y}} = 2.0706 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Esercizio 8.3.3

Un satellite corre su un'orbita circolare ad altezza incognita H; il satellite è tracciato da una stazione S con misure di distanza L_1, L_2, L_3

quando esso è a colatitudine rispettivamente pari a $\alpha_1 = 60°, \alpha_2 = 30°, \alpha_3 = 0°$.



Supposto che le misure L_i siano indipendenti, si dia la stima minimi quadrati di H e della sua varianza, sapendo che:

$$L_1 = 6557438.55 \text{ m}$$
$$L_2 = 3500552.27 \text{ m}$$
$$L_3 = 1000000.01 \text{ m}$$

Si noti che l'equazione d'osservazione per L_i è

$$L_i = [R^2 + (R+H)^2 - 2R(R+H)\cos\alpha_i]^{1/2} ;$$

si usi come valore approssimato $\tilde{H} = 10^6$ m e si ponga $R = 6 \cdot 10^6$ m. Per semplicità nell'eseguire i conti, dopo la linearizzazione si suggerisce la sostituzione:

$$\frac{R}{R+\tilde{H}} = p = \frac{6}{7} .$$

Svolgimento

Poiché l'equazione data:

$$L_i = f_i(H)$$

è non lineare nel parametro H da stimare, occorre linearizzarla:

$$L_{0i}+\delta y = \frac{(R+\tilde{H} - R\cos\alpha_i)}{L_i}\delta H + [R^2+(R+\tilde{H})^2 - 2R(R+\tilde{H})\cos\alpha_i]^{1/2}$$

Ponendo, come suggerito, $p = \dfrac{R}{R + \tilde{H}}$ si ha:

$$L_{0i} = \frac{1 - p\cos\alpha_i}{(1 + p^2 - 2p\cos\alpha_i)^{1/2}}\delta H + f_i(\tilde{H})$$

che corrisponde al modello:

$$L_0 = A\ \delta H + f(\tilde{H})$$

Inserendo i valori numerici si trova:

$$L_0 = \begin{bmatrix} 6557438.55 \\ 3500552.27 \\ 1000000.01 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.609994 \\ 0.515304 \\ 1.000000 \end{bmatrix}$$

La stima a minimi quadrati di δH è fornita dall'espressione:

$$\delta\hat{H} = (A^+ Q^{-1} A)^{-1}\ A^+ Q^{-1}(L_0 - f(\tilde{H}))$$

dove $Q \equiv I$.

Si ha:

$$L_0 - f(\tilde{H}) = \begin{bmatrix} 0.0260 \\ 0.0160 \\ 0.0100 \end{bmatrix}$$

$$(A^+ A)^{-1} = \frac{1}{1.637631}$$

$$A^+(L_0 - f(\tilde{H})) = 0.034105$$

$$\delta\hat{H} = 0.020826 \text{ m}$$

$$\hat{H} = 1000000.020826 \text{ m}$$

Stima degli scarti delle equazioni:

$$\hat{\varepsilon} = -A\ \delta\hat{H} + L_0 - f(\tilde{H})$$

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0.013296 \\ 0.005268 \\ -0.010826 \end{bmatrix}$$

Stima di σ_0^2:

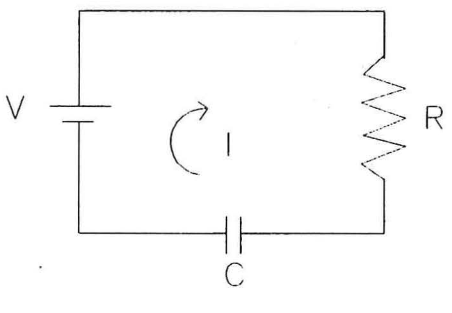
$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\varepsilon}^+ Q^{-1}\hat{\varepsilon}}{n-m} = \frac{\hat{\varepsilon}^+\hat{\varepsilon}}{2} = 1.61\ 10^{-4}$$

$$\hat{\sigma}_H^2 = \hat{\sigma}_0^2 (A^+A)^{-1} = 0.98\ 10^{-4}$$

$$\hat{\sigma}_H = 0.9911\ 10^{-2} \text{ m } = 0.99 \text{ cm}$$

Esercizio 8.3.4

Sia dato un circuito R-C in serie



con $C = 10^{-2}$ farad e $V = 100$ volt (in continua). Le leggi di carica del condensatore e della corrente nel circuito sono rispettivamente

$$q(t) = CV(1 - e^{-t/RC})$$
$$i(t) = \frac{V}{R} e^{-t/RC}$$

Osservati, in modo indipendente, due valori di $q(t)$ e un valore di
a tre tempi differenti (vedi tabella), si dia la stima minimi quad
del valore della resistenza R, posto che $\sigma(q) = 2 \cdot 10^{-3}$ Coulomb e $\sigma(i) = 10^{-3} A$.

t (s)	$q(t)$ (Coulomb)	$i(t)$ (Ampere)
1	0.638	
3		0.05
5	0.996	

Si suggerisce di ricavare il valore approssimato $\tilde{R}$ dall'osservazione $q(t)$ al tempo $t = 1$. Si consiglia inoltre di considerare come parametro incognito $x = \frac{1}{R}$.

Svolgimento

Si ricava il valore approssimato $\tilde{x} = \dfrac{1}{\tilde{R}}$ dalla prima equazione di osservazione:

$$q = CV\left(1 - e^{-\dfrac{t}{C}\tilde{x}}\right)$$

$$\frac{q}{CV} = 1 - e^{-\dfrac{t}{C}\tilde{x}} \qquad (t = 1)$$

$$1 - \frac{q}{CV} = e^{-\dfrac{\tilde{x}}{C}}$$

$$\ln\left(1 - \frac{q}{CV}\right) = -\frac{\tilde{x}}{C}$$

$$\tilde{x} = -C\ln\left(1 - \frac{q}{CV}\right) = -10^{-2}\ln\left(1 - \frac{0.638}{1}\right) = 0.010161$$

Le equazioni di osservazione sono:

$$\begin{cases} q_{01} = CV\left(1 - e^{-\dfrac{t(1)}{C}x}\right) \\ i_{02} = Vx - e^{-\dfrac{t(3)}{C}x} \\ q_{03} = CV\left(1 - e^{-\dfrac{t(3)}{C}x}\right) \end{cases}$$

Linearizzando si ottiene:

$$\begin{cases} \tilde{q}_{01} + \delta q_{01} = \tilde{q}_1 - \left[CVe^{-\dfrac{t(1)}{C}\tilde{x}} \cdot \left(-\dfrac{t(1)}{C}\right)\right]\delta x \\ \tilde{i}_{02} + \delta i_{02} = \tilde{i}_2 + \left[Ve^{-\dfrac{t(2)}{C}\tilde{x}} + V\tilde{x}e^{-\dfrac{t(2)}{C}\tilde{x}}\left(-\dfrac{t(2)}{C}\right)\right]\delta x \\ \tilde{q}_{03} + \delta q_{03} = \tilde{q}_3 - \left[CVe^{-\dfrac{t(3)}{C}\tilde{x}} \cdot \left(-\dfrac{t(3)}{C}\right)\right]\delta x \end{cases}$$

Il modello è del tipo:

$$D\eta = A\xi + d$$

dove:

$$D = I$$

$$\eta = \begin{bmatrix} \delta q_{01} \\ \delta i_{02} \\ \delta q_{03} \end{bmatrix} \quad ; \quad \xi = [\delta x]$$

$$d = \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 - \tilde{q}_{01} \\ \tilde{i}_2 - \tilde{i}_{02} \\ \tilde{q}_3 - \tilde{q}_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000000 \\ -0.001797 \\ -0.002217 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 36.200401 \\ -9.717033 \\ 3.108400 \end{bmatrix}$$

Dai dati dell'esercizio si ricava l'espressione della matrice Q:

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

La soluzione è:

$$\hat{\xi} = (A^+Q^{-1}A)^{-1}A^+Q^{-1}(-d)$$

$$N = A^+Q^{-1}A = 424.453526$$

$$N^{-1} = 0.002356$$

$$\begin{aligned} A^+Q^{-1}(-d) &= [36.200401 \quad -9.717033 \quad 3.108400] \begin{bmatrix} 0.000000 \\ 0.001797 \\ -0.000554 \end{bmatrix} = \\ &= -0.015783 \end{aligned}$$

$$\hat{\xi} = \delta\hat{x} = -0.000037$$

$$\hat{x} = \tilde{x} + \delta x = 0.010161 - 0.000037 = 0.010124 \text{ ohm}^{-1}$$

$$\hat{R} = \frac{1}{\hat{x}} = 98.776990 \text{ ohm}$$

Esercizio 8.3.5

Un corpo si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione approssimativamente uguale a 1 m/s^2, partendo con velocità nulla all'istante $t = 0$. La relazione tra spazio percorso e velocità è data da

$$s = \frac{v^2}{2a} \, .$$

Agli istanti $t = 1, t = 3$ vengono eseguite misure dello spazio percorso e della velocità:

t	s	v
1	0.506	1.008
3	4.497	3.035

Le misure sono indipendenti e le varianze sono pari a 1 cm^2 per le misure di lunghezza e pari a 3 cm^2/s^2 per le misure di velocità.

Stimare col metodo dei minimi quadrati il valore dell'accelerazione (si usino come valori approssimati di s e v quelli corrispondenti ad $a = 1$).

Svolgimento

Questo problema presenta una dipendenza non lineare non solo nei parametri, ma anche nelle osservabili; si tratta quindi del caso più generale, in cui la varietà lineare V è data da:

$$g(x, y) = 0$$

In questo esercizio le osservabili y sono due misure di distanze e due misure di velocità:

$$y = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} ,$$

mentre il parametro da stimare è l'accelerazione a:

$$x = a \ .$$

Le equazioni d'osservazione sono:

$$\begin{cases} s_1 - \dfrac{v_1^2}{2a} = 0 \\[2ex] s_2 - \dfrac{v_2^2}{2a} = 0 \end{cases}$$

Per poterle linearizzare è necessario cercare dei valori approssimati di s_i, v_i; seguendo il suggerimento del testo si ottiene

$$\begin{cases} \tilde{s}_1 = \dfrac{1}{2}\tilde{a}t_1^2 = \dfrac{1}{2} \\[2ex] \tilde{s}_2 = \dfrac{1}{2}\tilde{a}t_2^2 = \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{v}_1 = \tilde{a}t_1 = 1 \\ \tilde{v}_2 = \tilde{a}t_2 = 3 \end{cases}$$

Dalla matrice di covarianza delle osservazioni:

$$C_{oss} = \sigma_0^2 Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2}$$

si ricava la matrice Q:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

L'equazione $g(x, y) = 0$ viene linearizzata nel seguente modo [5]:

$$g(\tilde{x}, \tilde{y}) + \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial y}\right) \eta + \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}\right) \xi = 0$$

Si osservi che:

$$g(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{s}_i - \frac{\tilde{v}_i}{2\tilde{a}} = 0$$

e quindi si ha semplicemente:

$$\left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial y}\right) \eta + \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}\right) \xi = 0$$

Esplicitando:

$$\left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial s_i}\right) \delta s_i + \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial v_i}\right) \delta v_i + \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial a}\right) \delta a = 0$$

$$\delta s_i - \frac{\tilde{v}_i}{\tilde{a}} \delta v_i + \frac{\tilde{v}_i^2}{2\tilde{a}^2} \delta a = 0$$

[5]Si osservi che con il simbolo $\frac{\partial \tilde{x}}{\partial y}$ si vuole indicare la derivata della funzione g valutata nei punti approssimati $(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Il modello è quindi un modello lineare del tipo: $D\eta = A\xi + d$ dove:

$$\eta = \begin{bmatrix} \delta s \\ \delta v \end{bmatrix} \quad ; \quad \xi = \delta a$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\tilde{v}_1/\tilde{a} & 0 \\ \\ 0 & 1 & 0 & -\tilde{v}_2/\tilde{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{-\tilde{v}_1^2}{2\tilde{a}^2} \\ \\ \dfrac{-\tilde{v}_2^2}{2\tilde{a}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ \\ -\dfrac{9}{2} \end{bmatrix} \quad ; \quad d = 0$$

La soluzione è data da:

$$\delta\hat{a} = N^{-1}A^{+}K^{-1}[D\eta_0 - d] = N^{-1}A^{+}K^{-1}D\eta_0$$

$$\eta_0 = Y_0 - \tilde{Y} = \begin{bmatrix} 0.506 \\ 4.497 \\ 1.008 \\ 3.035 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 \\ 9/2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \cdot 10^{-3} \\ -3 \cdot 10^{-3} \\ 8 \cdot 10^{-3} \\ 35 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$K = DQD^{+} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 28 \end{bmatrix}$$

$$N = A^{+}K^{-1}A = \frac{11}{14}$$

Il valore stimato dell'accelerazione risulta dunque:

$$\begin{aligned} \delta\hat{a} &= \frac{14}{11}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (6-8) \\ (-3-105) \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} = \\ &= 0.022409 \end{aligned}$$

$$\hat{a} = 1 + 0.022409 = 1.022409$$

Esercizi

Esercizio 8.3.6

Un certo fenomeno fisico è descritto dalla legge:

$$y = t^{-\alpha} \ .$$

A tre diversi istanti di tempo vengono osservati i tre valori riportati in tabella

t	Y_0
2	0.709107
3	0.580350
4	0.501532

Sapendo che $\tilde{\alpha} = 0.49$ e che le misure sono indipendenti e di ugual precisione, ricavare la stima del parametro α e la sua varianza.

[**R:** $\hat{\alpha} = 0.496472$; $\hat{\sigma}^2_\alpha = 6.48\ 10^{-7}$]

Esercizio 8.3.7

È dato il modello non lineare:

$$y = a + x^b$$

Stimare a, b sapendo che sono state eseguite in modo indipendentee con la stessa precisione le seguenti osservazioni di y in corrispondenza delle x_i riportarte nella seguente tabella:

x	Y_0
1	0.017
2	2.988
3	8.006
4	14.991

Si usino i valori approssimati $\tilde{a} = -1$, $\tilde{b} = 2$.

[**R:** $\hat{a} = -0.993841$; $\hat{b} = 1.999350$]

Esercizio 8.3.8

La quantità Y verifica la legge

$$Y = A \sin(\vartheta + \alpha)$$

Si eseguono misure di Y in corrispondenza di alcuni valori di ϑ e si ottengono i seguenti risultati

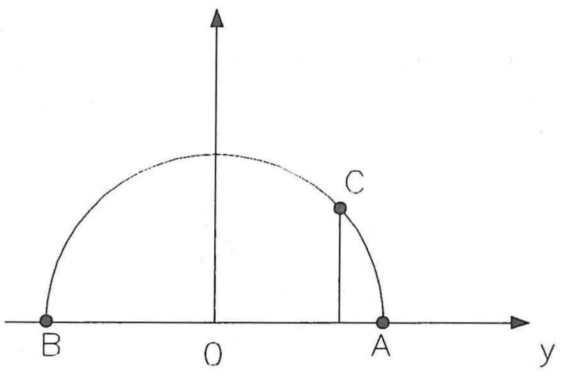
Y_0	ϑ
0.9997	0°
1.4144	45°
0.9993	90°
0.0002	135°
-1.0004	180°

Stimare i parametri A, α e le relative varianze, considerando come valori approssimati $\tilde{A} = \sqrt{2}$, $\tilde{\alpha} = 45°$.

[**R:** $\hat{A} = 1.414084$; $\hat{\alpha} = 45.000122$; $\hat{\sigma}_A^2 = 9.98\ 10^{-8}$; $\hat{\sigma}_\alpha^2 = 4.99\ 10^{-8}$]

Esercizio 8.3.9

Un corpo C si muove di moto circolare uniforme lungo una circonferenza, di raggio 1 km, con un periodo di circa 24 ore.



Al tempo $t = 0$, si trova nel punto A. Vengono effettuate misure (indipendenti e con la stessa precisione) dalla proiezione (y) della sua posizione sul diametro BA ottenendo i seguenti valori:

t (ore)	Y_0
5.0	0.258774
5.5	0.130592
6.0	0.000136
6.5	-0.130484
7.0	-0.258903
10.0	-0.866114

Stimare il periodo del moto e il valore di σ_0^2.

[**R:** $\hat{T} = 24.000099$; $\hat{\sigma}_0^2 = 0.82\ 10^{-8}$]

Esercizio 8.3.10

È dato un oscillatore smorzato, per il quale vale la seguente equazione di evoluzione temporale

$$y = e^{-\gamma t} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Si sono osservati i seguenti valori di y:

t	Y_0
1	0.593
2	0.128
3	-0.134
4	-0.135

Sapendo che la matrice dei pesi delle osservazioni è data da

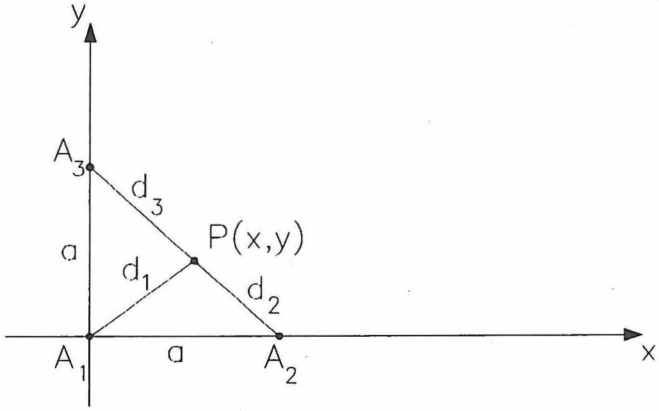
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si stimino con il metodo dei minimi quadrati i valori di γ ed ω e la loro matrice di covarianza. Si usino i valori approssimati: $\tilde{\gamma} = 0.5$, $\tilde{\omega} = 1$.

[**R:** $\hat{\gamma} = 0.499784$; $\hat{\omega} = 1.000340$; $\hat{\sigma}_\gamma^2 = 8.80\ 10^{-8}$; $\hat{\sigma}_\omega^2 = 6.55\ 10^{-8}$]

Esercizio 8.3.11

Nella rete di distanze illustrata in figura:



con A_1, A_2 e A_3 punti di coordinate note ($a = 1000$ m), si sono osservati i seguenti valori:

$$d_{01} = 707.110 \text{ m}$$
$$d_{02} = 707.105 \text{ m}$$
$$d_{03} = 707.104 \text{ m}$$

Dare una stima delle coordinate del punto P e delle relative varianze, assumendo come valori approssimati $\tilde{x} = \tilde{y} = 500$ m.

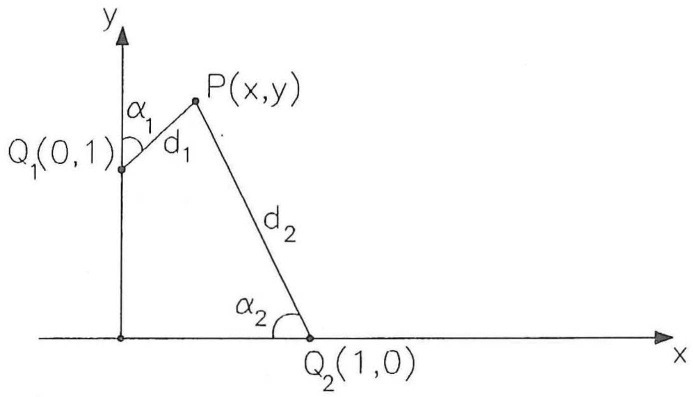
[**R:** $\hat{x} = 500.001923$ m ; $\hat{y} = 500.002630$ m ;
$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = 0.75 \cdot 10^{-5}$ m^2]

Esercizio 8.3.12

Si vogliono determinare con precisione le coordinate (x, y) del punto P, che si sanno essere approssimativamente pari a (0.5 km, 1.5 km). A tale scopo si misurano dai punti Q_1 e Q_2, situati sugli assi a 1 km dall'origine, gli angoli α_1, α_2 e le distanze d_1, d_2 indicate nella figura.

I valori ottenuti sono:

$\alpha_1 = 44°.996$; $\alpha_2 = 71°.569$; $d_1 = 707.12$ m ; $d_2 = 1581.17$ m .

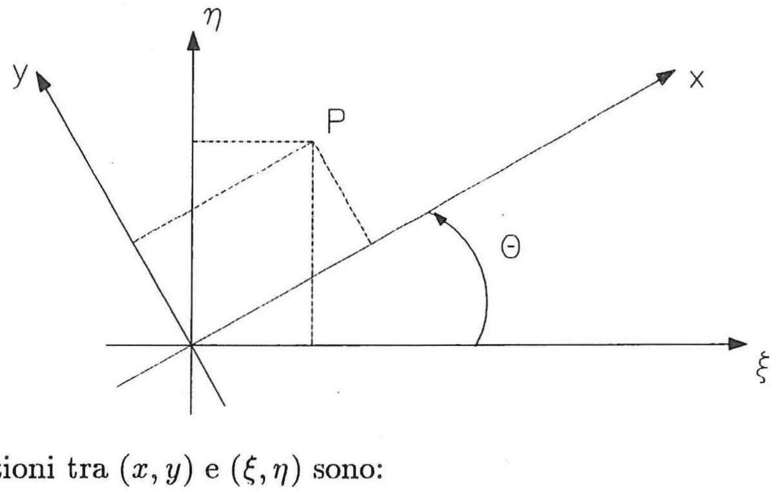


Sapendo che le varianze dei lati (in km^2) sono 3/5 delle varianze degli angoli (in rad^2) e che le misure sono fra loro indipendenti, determinare la stima delle coordinate di P.

Si noti che gli angoli vanno trasformati in radianti, affinché le formule usuali delle derivate siano corrette.

[**R:** $\hat{x}_P = 499.9975$ m ; $\hat{y}_P = 1500.0435$ m]

Esercizio 8.3.13
Un punto P ha coordinate cartesiane (ξ, η) note: $\xi = 1$, $\eta = 2$. Lo stesso punto ha coordinate (x, y) in un diverso sistema cartesiano, ruotato rispetto al primo di un angolo ϑ (valore approssimato: $\tilde{\vartheta} = 26°$).



Le relazioni tra (x, y) e (ξ, η) sono:

$$x = \xi \cos\vartheta + \eta \sin\vartheta$$

$$y = -\xi \sin\vartheta + \eta \cos\vartheta$$

Le coordinate (x, y) sono misurate, dando luogo ai valori:

$$x_0 = 1.767 \quad , \quad y_0 = 1.351$$

Le osservazioni (x_0, y_0) sono indipendenti ed affette da errori di uguale varianza.

a) Si usi il principio dei minimi quadrati in forma direttamente non lineare per stimare ϑ. Si noti che il principio dei minimi quadrati in questo caso si scriverà: $(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 = \min$. Sostituendo ad (x, y) le espressioni in funzione di ϑ ed imponendo la condizione di minimo si trova l'equazione di stima di ϑ.

b) Si linearizzi $\hat{\vartheta}$ in funzione di (x_0, y_0) e si calcoli la propagazione dell'errore da (x_0, y_0) a $\hat{\vartheta}$.

[**R:** $\hat{\vartheta} = 26.0344$; $\hat{\sigma}_{\vartheta}^2 = 2.77\ 10^{-5}$]

Esercizio 8.3.14

Per determinare la costante elastica k di una molla vengono appese alla sua estremità masse differenti m_i e vengono misurati i periodi di oscillazione corrispondenti T_i.

Sapendo che il periodo di oscillazione e la costante k sono legate dalla relazione

$$T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

e sulla base delle osservazioni in tabella

m_i	T_i
1	0.23
2	0.31
3	0.40
4	0.44

dare una stima di k e di σ_k^2 con il metodo dei minimi quadrati, supponendo che tutte le osservazioni siano state eseguite in modo indipendente e con uguale precisione (si assuma il valore approssimato $\tilde{k} = 0.6$).

[**R:** $\hat{k} = 0.4911$; $\hat{\sigma}_k^2 = 3.30\ 10^{-4}$]

Esercizio 8.3.15

La dinamica di una popolazione è retta dall'equazione (semplificata)

$$\frac{N(t)}{N(0)} = e^{nt}$$

dove:

$$\begin{aligned} N(t), N(0) &= \text{numerosità della popolazione rispettivamente} \\ & \text{al tempo } t \text{ e al tempo } 0; \\ n &= \text{coefficiente di natalità e morte;} \\ t &= \text{tempo (in anni).} \end{aligned}$$

Sapendo che in una popolazione $N(0) = 10.000$ (privo di errore), mentre ai tempi $t = 5$, $t = 10$ si hanno rilevazioni, con errori indipendenti e di ugual varianza,

$$N(5) = 11068$$
$$N(10) = 12203$$

sapendo inoltre che un valore approssimato di n è $\tilde{n} = 0.02$, si trovi la stima di n ed del suo scarto quadratico medio.

[**R:** $\hat{n} = 0.1370$; $\hat{\sigma}_n = 0.1170$]

Esercizio 8.3.16

Un serbatoio si svuota secondo la legge

$$Q(t) = Q_0 \left[1 - \left(\frac{t}{T}\right)\right]^2$$

dove il contenuto iniziale è $Q_0 = 10^3$ e T è il tempo di scarico in ore.

Sapendo che ai tempi $t_1 = 1h$ e $t_1 = 2h$ la quantità fuoriuscita è

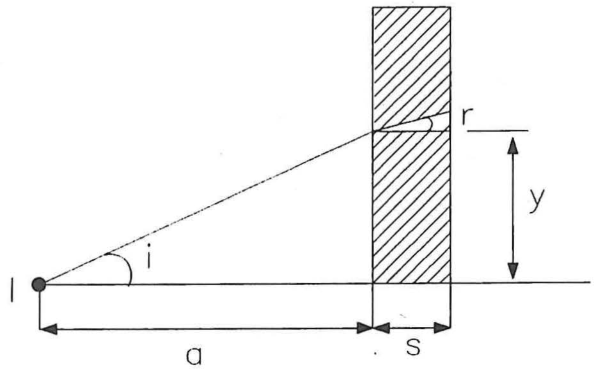
$$Y_1 = Q_0 - Q(t_1) = 180$$
$$Y_2 = Q_0 - Q(t_2) = 320$$

si stimi il valore di T ed il suo scarto quadratico medio supponendo che Y_1, Y_2 siano indipendenti e di ugual precisione. Si usi come valore approssimato $\tilde{T} = 10$ h.

[**R:** $\hat{T} = 11.0831$; $\hat{\sigma}_T = 0.2967$]

Esercizio 8.3.17

Per misurare l'indice di rifrazione n di una lastra di vetro di spessore $s = 1$ cm, viene utilizzata una sorgente luminosa I posta a distanza $a = 10$ cm. Si misurano quindi su di uno schermo le altezze Y corrispondenti a diversi angoli di incidenza i.



Vengono effettuate con uguale precisione due misure di Y:

$$Y_1 = 6.225 \text{ cm} \quad ; \quad Y_2 = 10.611 \text{ cm} \ ,$$

corrispondenti ai due diversi angoli di inclinazione $i_1 = 30°, i_2 = 45°$. Notando che la grandezza osservata Y è legata agli angoli di incidenza e di rifrazione i ed r dalla relazione

$$Y = a\ tg\ i + s\ tg\ r$$

e sapendo che vale la legge di Snell:

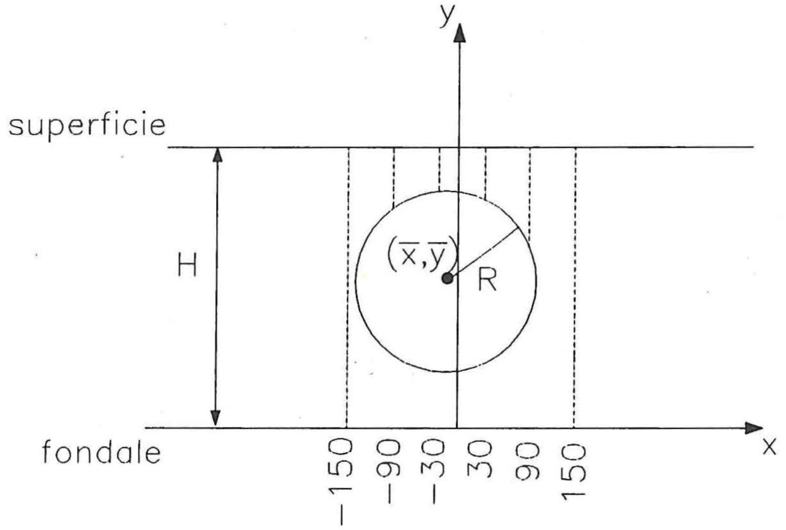
$$\frac{\sin i}{\sin r} = n$$

si ricavi una stima di n in termini di $\nu = 1/n$, a partire da un valore approssimato di $\tilde{\nu} = 0.66667$.

[**R:** $\hat{\nu} = 0.7634$; $\hat{n} = 1.3099$]

Esercizio 8.3.18

Una nave scandaglia un fondale a profondità H incognita per individuare un tunnel sommerso di raggio noto $R = 100$ m e con centro in posizione $(\overline{x}, \overline{y})$ rispetto al sistema di coordinate in figura:



Sono rilevati (in modo indipendente e con la stessa precisione) sei valori di profondità Y_0 in corrispondenza di altrettanti valori di x, che soddisfano il modello:

$$\begin{cases} Y_1 = Y_6 = H \\ Y_i = H - \overline{y} - \sqrt{R^2 - (x_i - \overline{x})^2} \qquad\qquad i = 2, \dots, 5 \end{cases}$$

I valori approssimati dei parametri incogniti sono:

$$\tilde{H} = 400 \text{ m} \quad ; \quad \tilde{\overline{x}} = 0 \text{ m} \quad ; \quad \tilde{\overline{y}} = 100 \text{ m}$$

Si linearizzino le equazioni d'osservazione e si dia la stima di minimi quadrati di $H, \overline{x}, \overline{y}$, del valore di σ_0^2 e della loro matrice di covarianza.

I valori osservati sono i seguenti:

x	Y_0
-150	400.170000
-90	246.741011
-30	195.186080
30	194.966080
90	247.051011
150	400.390000

[**R:** $\hat{H} = 400.2800$ m ; $\hat{\overline{x}} = -0.0654$ m ; $\hat{\overline{y}} = 109.8025$ m ; $\hat{\sigma}_0^2 = 0.0198$; $\hat{\sigma}_H^2 = 0.0099$; $\hat{\sigma}_{\overline{x}}^2 = 0.0023$; $\hat{\sigma}_{\overline{y}}^2 = 0.0148$]

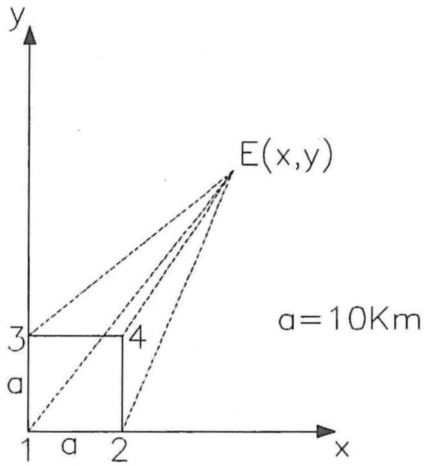
Esercizio 8.3.19

Per determinare l'epicentro di un terremoto si disponga di quattro sensori disposti a formare una rete sismica come indicato in figura.

Siano

$$
\begin{aligned}
T_{01} &= 80.711 \text{ s}, \\
T_{02} &= 77.267 \text{ s}, \\
T_{03} &= 77.269 \text{ s}, \\
T_{04} &= 73.640 \text{ s},
\end{aligned}
$$

i tempi di arrivo ai sensori 1, 2, 3, 4 delle onde generate in E e sia T_0 il tempo dell'evento sismico in E.



Supponendo che la velocità v di propagazione delle onde sia costante e uguale a 2 km/s, stimare le coordinate dell'epicentro E e il tempo T_0.

Si suggerisce, per determinare i valori approssimati delle coordinate $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ di E e del tempo $\tilde{T}_0$, di utilizzare le relazioni:

$$T_i = T_0 + \frac{1}{v}\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

Si ottiene:

$$\tilde{T}_0 = \frac{T_4^2 + T_1^2 - T_2^2 - T_3^2}{2(T_4 + T_1 - T_2 - T_3)}$$

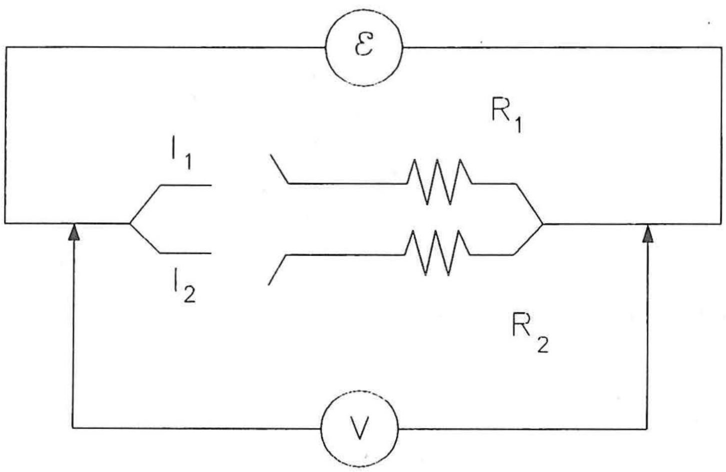
$$
\begin{aligned}
\tilde{x} &= \frac{v^2[(T_1-\tilde{T}_0)^2-(T_2-\tilde{T}_0)^2]+a^2}{2a} \\
\tilde{y} &= \frac{v^2[(T_1-\tilde{T}_0)^2-(T_3-\tilde{T}_0)^2]+a^2}{2a}
\end{aligned}
$$

In particolare si approssimi $\tilde{T}_0$ al secondo e $\tilde{x}, \tilde{y}$ al chilometro.

[**R:** $\hat{x} = 101.1065$ km ; $\hat{y} = 101.0552$ km ; $\hat{T}_0 = 9.1471$ s]

Esercizio 8.3.20

Sia $\mathcal{E}$ un generatore di corrente costante ($I = 30A$) e sia V un misuratore di tensione. Dato il circuito in figura si eseguono tre misure di V:



$$
\begin{aligned}
V_1 &= (I_1 \text{ chiuso}, I_2 \text{ aperto}) = 300 \\
V_2 &= (I_1 \text{ aperto}, I_2 \text{ chiuso}) = 600 \\
V_3 &= (I_1 \text{ chiuso}, I_2 \text{ chiuso}) = 204
\end{aligned}
$$

Sapendo che le misure V_i hanno lo stesso scarto quadratico medio σ_V e che sono eseguite indipendentemente, ricordando la legge di Ohm

$$V = R\,I$$

e la formula delle resistenze in parallelo:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

si trovi la stima di minimi quadrati di R_1 ed R_2 e del valore di σ_0^2.

Valori approssimati: $\tilde{R}_1 = 10, \tilde{R}_2 = 20$.

[**R:** $\hat{R}_1 = 10.0490$; $\hat{R}_2 = 20.0123$; $\hat{\sigma}_0^2 = 13.2247$]

Esercizio 8.3.21

La carica di un condensatore viene seguita misurando a intervalli di tempo costanti la tensione tra i due elettrodi. Le osservazioni di V in funzione di t sono:

$t_i(10^{-3}$ s)	V_i (volt)
2	0.408
4	0.642
6	0.755
8	0.794
10	0.841

Sapendo che la legge di carica è

$$V = V_0[1 - e^{-t/\tau}]$$

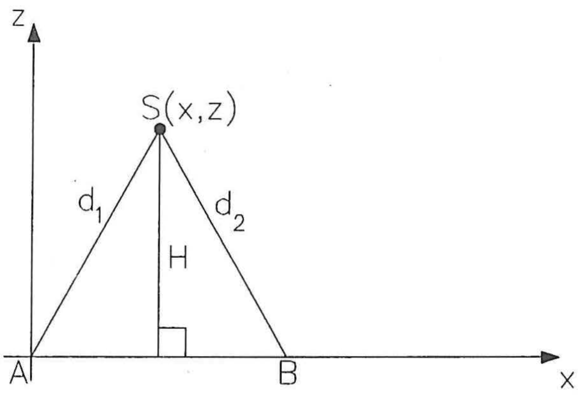
e supposto che le misure siano indipendenti e di ugual precisione, si dia una stima minimi quadrati di V_0, di $k = 1/\tau$ e dei loro scarti quadratici medi (Si assumano come valori approssimati $\tilde{V}_0 = 0.85$ volt, $\tilde{k} = 0.349$ s^{-1}).

[**R:** $\hat{V}_0 = 0.8703$; $\hat{k} = 0.3243$; $\hat{\sigma}_{V_0} = 0.0113$; $\hat{\sigma}_k = 0.0145$]

Esercizio 8.3.22

Un satellite S reca a bordo un radar altimetro che permette di determinare l'altezza H del satellite sulla superficie del mare sottostante.

Contemporaneamente il satellite è tracciato per controllo da due stazioni A e B di coordinate note: $x_A = 0$, $x_B = 200000$, $z_A = 0$, $z_B = 0$.



I valori osservati sono:

$$d_{01} = 412\ 315.7436 \text{ m}$$
$$d_{02} = 412\ 309.6438 \text{ m}$$
$$H_0 = 400\ 008.4523 \text{ m}$$

Supponendo che le osservazioni siano eseguite in modo indipendente e con $\sigma_0 = 0.1$ m, presi come valori approssimati $\tilde{x} = 100000$ m, $\tilde{z} = 400000$ m, si trovino le stime $\hat{x}, \hat{z}$ e loro varianze.

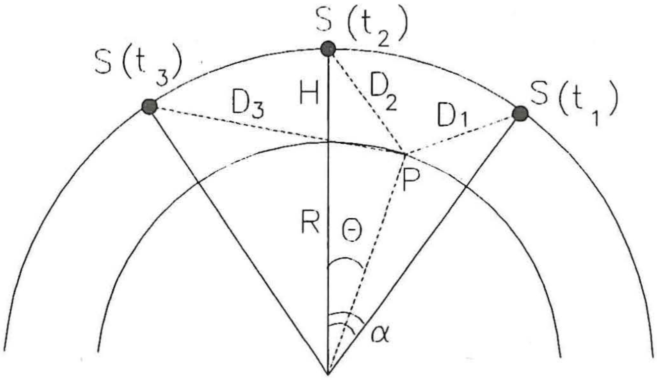
[**R:** $\hat{x} = 100012.5751$; $\hat{z} = 400004.3670$;
$\hat{\sigma}_x^2 = 217.2263$; $\hat{\sigma}_z^2 = 8.8664$]

Esercizio 8.3.23

Con il metodo Doppler è possibile misurare la variazione di distanza tra un punto a terra P ed un satellite S tra due epoche t, t'.

Per posizionare il punto P, che si trova ad altezza zero ed a colatitudine ϑ incognita, si sono misurati

$$m_1 = D_2 - D_1 = -2.500551 \cdot 10^3 \text{ km} ,$$
$$m_2 = D_3 - D_2 = 2.500554 \cdot 10^3 \text{ km} .$$



Per posizionare il punto P, che si trova ad altezza zero ed a colatitudine ϑ incognita, si sono misurati

$$\begin{aligned} m_1 = D_2 - D_1 &= -2.500551 \cdot 10^3 \text{ km} \; , \\ m_2 = D_3 - D_2 &= 2.500554 \cdot 10^3 \text{ km} \; . \end{aligned}$$

Sapendo che m_1, m_2 hanno lo stesso scarto quadratico medio e correlazione $\rho = -0.5$, che la distanza tra P ed S può essere espressa come

$$D = \{R^2 + (R+H)^2 - 2R(R+H)\cos(\vartheta - \alpha)\}^{1/2}$$

e che: $R = 6000$ km, $H = 1000$ km, si trovi la stima ottimale di $\hat{\vartheta}$ ed il suo scarto quadratico medio (come valore approssimato di ϑ si scelga $\tilde{\vartheta} = 0$).

$$\begin{aligned} \alpha(t_1) &= 30^\circ \\ \alpha(t_2) &= 0^\circ \\ \alpha(t_3) &= -30^\circ \end{aligned}$$

[**R:** $\hat{\vartheta} = 2.5004 \; 10^{-7}$; $\hat{\sigma}_\vartheta = 2.4676 \; 10^{-7}$]

Esercizio 8.3.24

Una stazione ricevente R, posta ad altezza $z = 0$, riceve dal satellite S un'onda elettromagnetica di lunghezza d'onda costante. Il satellite ha una legge di moto (semplificata) del tipo

$$z_S(t) = H = 400\ (\text{km})$$
$$x_S(t) = 4\ (\text{km s}^{-1}) \cdot \text{t(s)}$$

Il segnale ricevuto da R è tale da indicare al ricevitore anche il tempo t di emissione del segnale stesso.

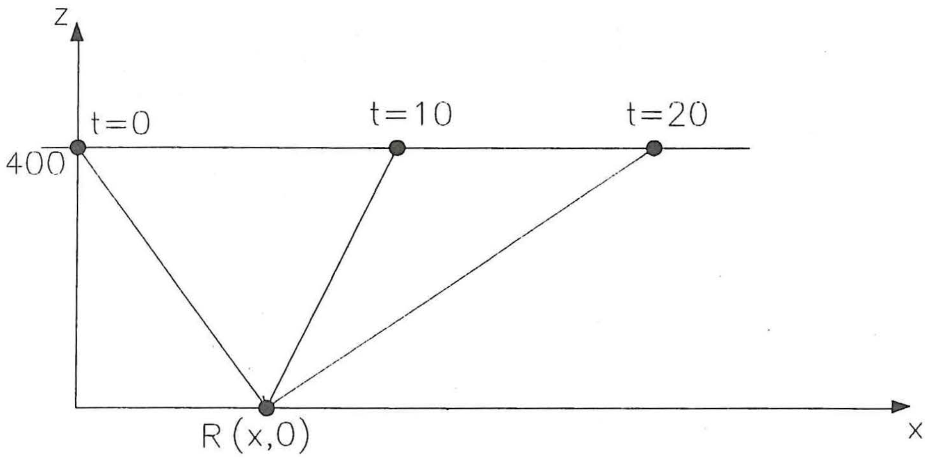
L'osservazione compiuta da R è la fase, misurata in termini di lunghezza d'onda: perciò l'equazione di osservazione è

$$\varphi_{oss}(t) = d_{RS}(t) - b$$

dove $d_{RS}(t)$ è la distanza fra R e S al tempo t e il parametro b indica un numero incognito di lunghezze d'onda iniziali, così che b è costante nel tempo.

Si misurano tre fasi in corrispondenza di altrettanti tempi:

$$\begin{array}{rrrr} t_1 = & 0\ \text{s} & \varphi(t_1) = & 0.000044 \\ t_2 = & 10\ \text{s} & \varphi(t_2) = & -0.998442 \\ t_3 = & 20\ \text{s} & \varphi(t_3) = & 1.989486 \end{array}$$



Sapendo che le tre fasi sono misurate indipendentemente, con lo stesso erore di misura σ_0 e che $\tilde{x} = 30$ km e $\tilde{b} = 401.123378$ km si calcolino la stima minimi quadrati di x e b e della loro matrice di covarianza, nonché la stima di σ_0^2.

[**R:** $\hat{x} = 30.0001$; $\hat{b} = 401.123397$; $\hat{\sigma}_0^2 = 7.05 \; 10^{-10}$]

Esercizio 8.3.25

La trasmittente A trasmette il segnale nella forma $S(t) = 10e^{-t^2}$; tale segnale, dopo un tempo di propagazione T, è ricevuto dal ricevitore B sotto la forma

$$r(t) = 10e^{-(t-T)^2}$$

ed è campionato agli istanti $t_i = 4,\ 5,\ 6,\ 7$. I valori effettivamente ricevuti $r_0(t)$ sono pari ai valori $r(t_i)$, più un rumore bianco

$$r_0(t_i) = r(t_i) + n_i = 10e^{-(t_i-T)^2} + n_i$$

$$E\{n_i\} = 0 \ , \quad E\{n_i^2\} = \sigma_0^2 \ , \quad E\{n_i n_k\} = 0 \qquad (i \neq k) \ .$$

Il vettore dei valori osservati ai tempi $t_i = 4,\ 5,\ 6,\ 7$ vale

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 1.018 \\ 7.872 \\ 7.838 \\ 0.734 \end{bmatrix}$$

Dato il modello stocastico del rumore, si stimi col metodo dei minimi quadrati il parametro T (a partire dal valore approssimato $\tilde{T} = 5$), $\hat{\sigma}_0^2$ e lo scarto quadratico medio di $\hat{T}$.

[**R:** $\hat{T} = 5.4649$; $\hat{\sigma}_0^2 = 1.8985$; $\hat{\sigma}_T = 0.1321$]

9 L'INFERENZA PER LE STIME DI MINIMI QUADRATI

Verifica della correttezza del modello deterministico

È importante quando si sospetti che fra i valori osservati c'è un outlier, cioé un dato che non segue la legge prevista dal modello deterministico

$$y = Ax + a \ .$$

Si fissa l'ipotesi $H_0 : \sigma_0^2 = \overline{\sigma}_0^2$, perché la presenza di outliers "gonfia" la stima di σ_0^2 rispetto al valore corretto.

La verifica d'ipotesi è fatta tramite la formula:

$$(n-m)\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\overline{\sigma}_0^2} \sim \chi^2_{(n-m)}$$

(livello di significatività α; test a 1 coda).

Se l'ipotesi H_0 è rifiutata, si sospetta la presenza di outliers.

Ricerca di outliers

Nel caso in cui si sospetti la presenza di un outlier, esso va individuato ed eliminato e la stima minimi quadrati va ripetuta.

Si procede calcolando gli scarti normalizzati

$$v_i = \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{q_{ii} - (AN^{-1}A^{+})_{ii}}}$$

Il massimo v_i corrisponde all'outlier.

Dopo averlo eliminato, si ripete la stima minimi quadrati con le $(n-1)$ equazioni rimaste e al termine si riesegue il test sul $\hat{\sigma}_0^2$.

Test sui parametri

Sono test del tipo: data la stima minimi quadrati di un vettore di parametri $\hat{x}$ e della loro matrice di covarianza $C_{\hat{x}\hat{x}} = \sigma_0^2 N^{-1}$, si formula un'ipotesi sui parametri: $H_0: \; x = \overline{x}$; la verifica si esegue controllando se $\hat{x}$ è significativamente diverso da $\overline{x}$.

- **Test su tutto il vettore x**

  Se σ_0^2 è noto:

  $$\frac{(\hat{x} - \overline{x})^+ N (\hat{x} - \overline{x})}{\sigma_0^2} \sim \chi_m^2 \quad ; \quad m = \text{ numero di parametri stimati.}$$

  Se σ_0^2 è incognito:

  $$\frac{\frac{1}{m}(\hat{x} - \overline{x})^+ N (\hat{x} - \overline{x})}{\hat{\sigma}_0^2} \sim F_{(m,n-m)} \quad ; \quad n = \text{ numero di equazioni.}$$

- **Test su r componenti di x, con σ_0^2 incognito**

  $H_0 : \xi = \overline{\xi}$

  $$\frac{\frac{1}{r}(\hat{\xi} - \overline{\xi})^+ (P N^{-1} P^+)^{-1} (\hat{\xi} - \overline{\xi})}{\hat{\sigma}_0^2} \sim F_{(r,n-m)}$$

  Si noti che:

  - ξ è il vettore che contiene le r componenti di x su cui si vuole eseguire il test;

  - P è la matrice che estrae da x le r componenti volute.

- **Test su un componente di x, con σ_0^2 incognito**

  $H_0 : x_i = \overline{x}_i$

  $$\frac{\hat{x}_i - \overline{x}_i}{\hat{\sigma}_0^2 \sqrt{(P N^{-1} P^+)}} \sim t_{(n-m)}$$

  P è il vettore riga che estrae la componente x_i da x.

- **Problema del controllo**

  Dato il vettore x di parametri, lo si stima al tempo t_1 ottenendo $\hat{x}_1$ e al tempo t_2 ottendendo $\hat{x}_2$. L'ipotesi da verificare è $H_0 : x_1 = x_2$, cioé si vuole verificare se il modello è variato da t_1 a t_2.

  La formula che si utilizza è:

$$\frac{\frac{1}{m}(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)^+ N(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)}{\hat{\sigma}_{01}^2 + \hat{\sigma}_{02}^2} \sim F_{(m,2(n-m))}$$

- **Problema del controllo di un solo parametro**

  L'ipotesi da verificare è $H_0 : x_{i1} = x_{i2}$. La formula che si utilizza è

$$\frac{\hat{x}_{i1} - \hat{x}_{i2}}{\sqrt{(\hat{\sigma}_{01}^2 + \hat{\sigma}_{02}^2) \cdot N_{ii}^{-1}}} \sim t_{2(n-m)}$$

Scelta del modello di regressione lineare

Si vuole prendere una decisione riguardo all'eliminazione di una o più variabili della regressione, per comprendere nel modello solo le variabili essenziali (quelle che effettivamente influenzano y).

Se si suppone che il modello dipenda da p variabili: $t_1, \ldots, t_p$ e che si sia ottenuta la stima $\hat{y}_{(p)}$, si formula l'ipotesi $H_0 : c_k = 0$ (che corrisponde a porre uguale a zero la k-esima variabile).

Si ristima quindi il valore di y in funzione delle $(p-1)$ variabili, $\hat{y}(p-1)$, e si calcola il seguente valore campionario per verificare H_0:

$$\frac{|\hat{y}(p) - \hat{y}(p-1)|^2}{\frac{|Y_0 - \hat{y}(p)|^2}{n-p-1}} = \frac{(n-p)\hat{\sigma}_{0(p-1)}^2 - (n-p-1)\hat{\sigma}_{0(p)}^2}{\hat{\sigma}_{0(p)}^2} \sim F_{(1,n-p-1)}$$

Analisi di varianza

Si studia l'applicazione dei test alle stime di minimi quadrati per un problema particolare:

> dato un insieme di osservazioni (stocasticamente) indipendenti, tratte da distribuzioni normali con ugual varianza e con medie che potrebbero dipendere da uno o più fattori concomitanti, ci si propone di valutare se tale dipendenza esiste veramente ed eventualmente per quali dei fattori essa sia significativa.

Si considerano due casi:

- **Classificazione a una via:** il fattore concomitante A è uno solo, specificato da p possibili valori $A = A_1, \ldots, A_p$.

  L'ipotesi è $H_0 : E\{Y_{0ij}\} \in V_1$, con V_1 = varietà dei valori ammissibili monodimensionale; ciò equivale a richiedere che le medie teoriche siano uguali: $\mu_1 = \ldots = \mu_p$.

  Si dimostra che, essendo:

  n_i = numerosità delle osservazioni per il valore i-esimo del fattore concomitante;

  p = numero di trattamenti;

  $n = \sum_{i=1}^{p} n_i$ = numerosità totale del campione;

  $\overline{y}_i$ = media per l'i-esimo trattamento;

  $\overline{y}$ = media generale;

  $M_{(2)}$ = momento generale di ordine due,

  si utilizza per la verifica la seguente statistica:

$$\left(\frac{n-p}{p-1}\right) \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i \overline{y}_i^2 - n\overline{y}^2}{nM_{(2)} - \sum_{i=1}^{p} n_i \overline{y}_i^2} \sim F_{(p-1),(n-p)} \, .$$

- **Classificazione a due vie:** i risultati delle osservazioni sono classificati secondo i valori argomentali assunti da due fattori concomitanti $A = A_1, \ldots, A_q$ e $B = B_1, \ldots, B_p$.

  Le osservazioni possono essere ordinate in una tabella (matrice) di elementi $Y_{0ij} (i = 1, \ldots, q \quad ; \quad j = 1, \ldots, p)$.

  Si suppone che le osservazioni seguano il modello generale:

$$\begin{cases} E\{Y_{0ij}\} = \alpha_i + \beta_j \\ C_{Y_0Y_0} = \sigma_0^2 I \end{cases}$$

  con α_i = fattore dipendente dalla riga; β_j = fattore dipendente dalla colonna.

  L'ipotesi da verificare è $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_q$ (cioé A non ha alcun effetto sulle osservazioni Y_0), oppure $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_p$ (B non ha effetto su Y_0).

  La simbologia usata è:

  $\overline{y}_{i\cdot} = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} Y_{0ij}$ = media per riga;

  $\overline{y}_{\cdot j} = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} Y_{0ij}$ = media per colonna;

  $\overline{y} = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} \overline{y}_{i\cdot} = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} \overline{y}_{\cdot j}$ = media generale;

  $M_{(2)} = \frac{1}{pq}\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} Y_{0ij}^2$ = momento totale di ordine due.

  Si dimostra che per verificare la prima ipotesi si usa la statistica:

$$(p-1)\frac{p\sum_{i=1}^{q}\overline{y}_{i\cdot}^2 - pq\overline{y}^2}{pqM_{(2)} - p\sum_{i=1}^{q}\overline{y}_{i\cdot}^2 - q\sum_{j=1}^{p}\overline{y}_{\cdot j}^2 + pq\overline{y}^2} \sim F_{(q-1),(p-1)(q-1)}$$

  Per la seconda ipotesi si usa invece la statistica:

$$(q-1)\frac{q\sum_{j=1}^{p}\overline{y}_{\cdot j}^2 - pq\overline{y}^2}{pqM_{(2)} - p\sum_{i=1}^{q}\overline{y}_{i\cdot}^2 - q\sum_{j=1}^{p}\overline{y}_{\cdot j}^2 + pq\overline{y}^2} \sim F_{(p-1),(p-1)(q-1)}$$

Problemi risolti

Esercizio 9.1

Sia dato il modello lineare:

$$y = Ax + a; \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix};$$

$$x = [x]; \quad a = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e si supponga di aver eseguito le seguenti osservazioni di y,

$$Y_0^+ = [+3.1 \quad -2.2 \quad +1.7 \quad -2.8]\ ;$$

sia inoltre noto il modello stocastico $C_{YY} = \sigma_0^2\ I$.

Sapendo, sulla base della conoscenza del processo di osservazione, che $\sigma_0 \sim 0.2$, verificare in quale equazione si ha un outlier ($\alpha = 1\%$).

Svolgimento

Si calcola $\hat{x}$ e il vettore degli scarti, sapendo che:

$$\hat{x} = (A^+Q^{-1}A)^{-1}A^+Q^{-1}(Y_0 - a)$$

e poiché $Q = I$:

$$\hat{x} = (A^+A)^{-1}A^+(Y_0 - a)$$

$$\hat{x} = 10^{-1}[1 \quad 2 \quad -1 \quad -2] \begin{bmatrix} 1.1 \\ -1.2 \\ -1.3 \\ -1.8 \end{bmatrix} = 0.36$$

$$\hat{y} = A\hat{x} + a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} 0.36 + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.36 \\ -0.28 \\ 2.64 \\ -1.72 \end{bmatrix}$$

Vettore degli scarti:

$$\hat{\varepsilon} = Y_0 - \hat{y} = \begin{bmatrix} 0.74 \\ -1.92 \\ -0.94 \\ -1.08 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\varepsilon}^+ \hat{\varepsilon}}{n - m}$$

dove: n = numero equazioni, m = numero parametri.

Si ottiene:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\varepsilon}^+ \hat{\varepsilon}}{3} = 2.0946$$

Poiché si sa (da informazioni a priori) che $\sigma_0 \cong 0.2$, cioé $\sigma_0^2 \cong 0.04$, per verificare la correttezza del modello si fissa l'ipotesi $H_0 : \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2$. Se H_0 è vera deve valere:

$$(n - m)\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = \chi^2_{oss} \leq \chi^2_{(n-m)}(\alpha)$$

Nel caso in esame:

$$3\,\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = 157.10025$$

Considerando $\alpha = 1\%$ (test a una coda):

$$\chi^2_3(0.99) = 11.3$$

Poiché:

$$\chi^2_{oss} > \chi^2_3(0.99)$$

si rifiuta l'ipotesi H_0, cioé il modello non è corretto.

Per decidere in quale equazione si trova l'outlier, si calcolano gli scarti normalizzati secondo la formula:

$$v_i = \frac{1}{\sigma_0} \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{q_{ii} - (AN^{-1}A^{+})_{ii}}}$$

ottenendo:

$$v_1 = \frac{1}{\sigma_0} \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{1 - 1/10}} = \frac{0.780028}{\sigma_0}$$

$$v_2 = \frac{1}{\sigma_0} \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{1 - 4/10}} = \frac{-2.478709}{\sigma_0}$$

$$v_3 = \frac{1}{\sigma_0} \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{1 - 1/10}} = \frac{-0.990847}{\sigma_0}$$

$$v_4 = \frac{1}{\sigma_0} \frac{\varepsilon_4}{\sqrt{1 - 4/10}} = \frac{-1.394274}{\sigma_0}$$

che si può anche scrivere come:

$$v = \frac{1}{\sigma_0} \begin{bmatrix} 0.780028 \\ -2.478709 \\ -0.990847 \\ -1.394274 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \text{ sospetto outlier} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Per verificare se l'equazione "sospetta" è la seconda, la si elimina e si ristima $\hat{x}$ a partire dalle altre tre, considerando:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad ; \quad x = [x] \quad ; \quad a = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 3.1 \\ 1.7 \\ -2.8 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = (A^+A)^{-1}A^+(Y_0 - a) = \frac{1}{6}[1 \ -1 \ -2]\begin{bmatrix} 1.1 \\ -1.3 \\ -1.8 \end{bmatrix} = 100$$

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\varepsilon}^+\hat{\varepsilon}}{3-1} = 0.07$$

Si fissa l'ipotesi $H_0 : \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2$

$$(n-m)\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = 2\frac{0.07}{0.04} = 3.5 = \chi^2_{oss}$$

Se $\alpha = 1\% : \chi_2^2(0.99) = 9.21$ (test a una coda). Poiché:

$$\chi^2_{oss} \leq \chi_2^2(0.99)$$

si accetta l'ipotesi H_0, quindi l'outlier sembra sia stato eliminato (cioé il nuovo modello ristimato con la prima, la terza e la quarta equazione sembra sia corretto).

Per avere un'ulteriore conferma, si considera la seconda equazione e si calcola lo scarto W corrispondente:

$$Y_{02} - (2\hat{x} - 1) = W$$
$$Y_{02} - 1 = -2.2 - 1 = -3.2 = W$$

Si introduce l'ipotesi H_0: la seconda equazione non contiene outlier.

In tal caso W deve essere a media nulla, quindi l'ipotesi precedente è equivalente all'ipotesi $H_0 : \mu_W = 0$, che è verificabile tramite un test sulla media di campioni normali:

$$\frac{W - \mu_W}{\sigma_W} \sim \mathcal{Z} \ .$$

Si calcola σ_W^2 usando la legge di propagazione dell'errore:

$$\sigma_W^2 = \sigma_0^2 + 4\hat{\sigma}_{\hat{x}}^2$$

con:

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{x}} = C_{\hat{x}\hat{x}} = \sigma_0^2 N^{-1} = \frac{\sigma_0^2}{6} \; .$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \sigma_W^2 &= \sigma_0^2 + 4\frac{\sigma_0^2}{6} = 0.116667 \\ \frac{W}{\sigma_W} &= Z_{oss} = -9.368627 \end{aligned}$$

Si esegue il test con $\alpha = 1\%$:

$$\mathcal{Z}_{\alpha/2} = 2.57$$

Poiché

$$|Z_{oss}| > \mathcal{Z}_{\alpha/2}$$

si rifiuta l'ipotesi H_0, cioé W contiene effettivamente un outlier.

Esercizio 9.2

In un problema di regressione lineare

$$y = a + bt + ct^2$$

si sono stimati con i minimi quadrati i parametri a, b, c a partire dalle seguenti osservazioni:

t	Y_0
-2	1.88
-1	1.21
0	1.49
1	2.83
2	5.09

Si sono ottenute le seguenti stime:

$$\begin{cases} \hat{a} = 1.511429 \\ \hat{b} = 0.804000 \\ \hat{c} = 0.494286 \end{cases}$$

Valutare l'ipotesi $H_0 : \{a = 1.5,\ b = 1.0,\ c = 0.5\}$ al livello di significatività $\alpha = 1\%$. Nel caso l'ipotesi H_0 sia rifiutata, sottoporre a test separatamente i singoli parametri (sempre con $\alpha = 1\%$).

Svolgimento

Per valutare l'ipotesi H_0 si utilizza la statistica:

$$\frac{\frac{1}{m}(\hat{x} - x)^{+} N(\hat{x} - x)}{\hat{\sigma}_0^2} \sim F_{m,n-m}$$

Occorre quindi valutare $\hat{\sigma}_0^2$:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\varepsilon}^{+}\hat{\varepsilon}}{n - m}$$

dove: n = numero di equazioni d'osservazione; m = numero di parametri stimati.

Si ha:

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} 1.880573 \\ 1.201715 \\ 1.511429 \\ 2.809715 \\ 5.096573 \end{bmatrix} \quad ; \quad \hat{\varepsilon} = Y_0 - \hat{y} = \begin{bmatrix} -5.73 \\ 82.85 \\ -214.29 \\ 202.85 \\ -65.73 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = 4.91 \cdot 10^{-4}$$

Inoltre:

$$\hat{x} - x = \begin{bmatrix} 1.511429 - 1.5 \\ 0.804000 - 1.0 \\ 0.494286 - 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.011429 \\ -0.196000 \\ -0.005714 \end{bmatrix}$$

$$N = A^{+}A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \; ; N^{-1} = \frac{1}{70} \begin{bmatrix} 34 & 0 & -10 \\ 0 & 7 & 0 \\ -10 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Il valore osservato della statistica F risulta essere:

$$F_{oss} = 260.88$$

Dalle tabelle: $F_{3,2}(\alpha = 1\%) = 99.17$, quindi l'ipotesi H_0 è rifiutata.

Si sottopongono allora a test i singoli parametri.

La statistica che si utilizza per il test è:

$$\frac{\hat{\xi} - \xi}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{PN^{-1}P^{+}}} \sim t_{n-m} \ ,$$

dove ξ è il parametro da sottoporre a verifica e $PN^{-1}P^{+}$ è l'elemento diagonale di N^{-1} corrispondente al parametro stesso.

Per la valutazione dell'ipotesi $H_0 : a = 1.5$ si ha:

$$\begin{aligned} &\xi = a \\ &P = [1\ 0\ 0] \\ &PN^{-1}P^{+} = \frac{34}{70} = 0.485714 \end{aligned}$$

Si noti che $\hat{\sigma}_0 \sqrt{PN^{-1}P^{+}}$ è lo scarto quadratico medio stimato per il parametro in questione. Nel primo caso risulta:

$$\frac{\hat{a} - 1.5}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{0.485714}} = t_{oss} = 0.7401$$

Poiché dalle tabelle: $t_2(0.995) = 9.92$, l'ipotesi H_0 è accettata.

Negli altri due casi si ha:

$$H_0 : b = 1.0$$

$$\frac{\hat{b} - b}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{\frac{7}{70}}} = \frac{\hat{b} - b}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{0.1}} = -27.9715$$

l'ipotesi H_0 è rifiutata.

$$H_0 : c = 0.5$$

$$\frac{\hat{c} - c}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{\frac{5}{70}}} = \frac{\hat{c} - c}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{0.071429}} = -0.9649$$

l'ipotesi H_0 è accettata.

Esercizio 9.3

Si vuole verificare se il tempo di risposta g (in millisecondi) per un circuito usato in un calcolatore elettronico è funzione lineare della temperatura T dell'ambiente di funzionamento del calcolatore stesso.

Si ottengono come risultati di cinque prove:

T(°C)	g (ms)
19	17.5
22	18.5
20	19.0
18	20.0
25	21.0

a) Stimare i coefficienti della regressione lineare:

$$g = aT + b$$

b) Stabilire quale dei due modelli

$$\begin{array}{ll} g = aT + b & \text{modello I} \\ g = c & \text{modello II} \end{array}$$

è più significativo ($\alpha = 5\%$).

Svolgimento

a) Si stimano i coefficienti della regressione con un modello di minimi quadrati in forma parametrica:

$$y = Ax$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = (A^+A)^{-1}A^+Y_0$$

$$A = \begin{bmatrix} 17.5 & 1 \\ 18.5 & 1 \\ 19.0 & 1 \\ 20.0 & 1 \\ 21.0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad N = A^+A = \begin{bmatrix} 1850.5 & 96 \\ 96 & 5 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = (A^+A)^{-1} = \frac{1}{36.5}\begin{bmatrix} 5 & -96 \\ -96 & 1850.5 \end{bmatrix}$$

$$A^+Y_0 = \begin{bmatrix} 2004.5 \\ 104 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.054795 \\ 0.547945 \end{bmatrix}$$

Modello I stimato:

$$g = 1.054795T + 0.547945 \ ,$$

esso rappresenta una regressione su un parametro ($p = 1$).

b) Valutare la significatività della regressione in questo caso significa valutare se non c'è una dipendenza dalla temperatura, per cui il modello diventa semplicemente:

$$g = c$$

$$\hat{c} = \overline{g} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} g_{0i} = 20.8$$

Modello II stimato:

$$g = 20.8 \ ,$$

esso rappresenta una regressione su zero parametri ($p - 1 = 0$).

L'ipotesi H_0: regressione non significativa sulla temperatura, si valuta con la statistica:

$$\frac{|\hat{y}(p) - \hat{y}(p-1)|^2}{\dfrac{|Y_0 - \hat{y}(p)|^2}{n-p-1}} \sim F_{1,(n-p-1)}$$

dove: n = numero di equazioni, $p = 1$.

Si ha (per il teorema di decomposizione degli scarti):

$$\frac{|Y_0 - \hat{y}(p-1)|^2 - |Y_0 - \hat{y}(p)|^2}{\dfrac{|Y_0 - \hat{y}(p)|^2}{n-p-1}} \sim F_{1,(n-p-1)}$$

$$F_{oss} = \frac{\sum_{i=1}^{5}(g_{0i} - \hat{g}_i(p-1))^2 - \sum_{i=1}^{5}(g_{0i} - \hat{g}_i(p))^2}{\frac{\sum_{i=1}^{5}(g_{0i} - \hat{g}_i(p))^2}{3}}$$

dove:

$\sum_{i=1}^{5}(g_{0i} - \hat{g}_i(p))^2$ = scarto non spiegato dal modello I ;

$\sum_{i=1}^{5}(g_{0i} - \hat{g}_i(p-1))^2$ = scarto non spiegato dal modello II.

Valori osservati e stimati dai due modelli:

g_0	Modello I $\hat{g}(p)$	Modello II $\hat{g}(p-1)$
19.0	19.006849	20.8
22.0	20.061644	20.8
20.0	20.589041	20.8
18.0	21.643836	20.8
25.0	22.698631	20.8

quindi:

$$\sum_{i=1}^{5}(g_{0i} - \hat{g}_i(p))^2 = 22.678080$$

$$\sum_{i=1}^{5}(g_{0i} - \hat{g}_i(p-1))^2 = 30.8$$

$$\sum_{i=1}^{5}(\hat{g}_i(p) - \hat{g}_i(p-1))^2 = 8.121923$$

Il valore calcolato di F risulta essere:

$$F_{oss} = 1.074419$$

Dalle tabelle si ricava:

$$F_{(1,3)}(0.95) = 10.13$$

quindi, poiché

$$F_{oss} < F_{(1,3)}(0.95)$$

si accetta l'ipotesi H_0: la regressione su T non è significativa.

Esercizio 9.4

È stato osservato il tempo di risposta (in millisecondi) per tre diversi tipi di circuiti usati in un calcolatore elettronico. Questi sono i risultati:

Tipo di circuito	Tempo di risposta				
1	19	22	20	18	25
2	20	21	33	27	40
3	16	15	18	26	17

Sottoporre a verifica l'ipotesi che i tre tipi di circuito abbiano lo stesso tempo di risposta con un'affidabilità $\alpha = 5\%$.

Svolgimento

Le medie $\overline{y}_i$ e i momenti del secondo ordine $M_{(2)_i}$ per trattamento (tipo di circuito) sono:

$\overline{y}_i$	$M_{(2)_i}$
20.8	438.8
28.2	851.8
18.4	354.0

La media generale e il momento del secondo ordine, generale, delle osservazioni sono dati da:

$$\overline{y} = 22.466667 \quad ; \quad M_{(2)} = 548.2$$

Dalla teoria, si ricorda che si deve utilizzare la statistica:

$$\left(\frac{n-p}{p-1}\right) \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i \overline{y}_i^2 - n\overline{y}^2}{nM_{(2)} - \sum_{i=1}^{p} n_i \overline{y}_i^2} \sim F_{(p-1),(n-p)}$$

Nel caso in esame:

$$
\begin{aligned}
F_{oss} &= \frac{(15-3)}{(3-1)} \frac{5(20.8^2+28.2^2+18.4^2)-15(22.466667^2)}{15(548.2)-5(20.8^2+28.2^2+18.4^2)} = \\
&= 4.006138
\end{aligned}
$$

I gradi di libertà di F sono 2 per il numeratore, 12 per il denominatore.

Dalle tabelle, il valore teorico della F è:

$$F_{(2,12)}(0.95) = 3.89$$

Poiché $F_{oss} > F_{(2,12)}(0.95)$, non si accetta l'ipotesi H_0, cioé i tre circuiti non hanno lo stesso tempo di risposta.

Esercizio 9.5

In tabella è riportato l'aumento in altezza di piante concimate con tre diversi tipi di concime in quattro diversi campi. Si esegua un'analisi per verificare se i tre tipi di concimazione hanno dato risultati significativamente diversi ($\alpha = 5\%$) e se le piante dei quattro campi possono essere considerate come estratte dallo stesso universo ($\alpha = 5\%$).

	Campi			
Concimi	1	2	3	4
A	7.0	16.0	10.5	13.5
B	14.0	15.5	15.0	21.0
C	8.5	16.5	9.5	13.5

Svolgimento

Gli elementi della tabella costituiscono la matrice $\{Y_{0ij}\}$ delle osservazioni.

Il modello lineare si ipotizza costruito nel seguente modo:

$$E\{Y_{0ij}\} = \alpha_i + \beta_j$$

con:

α_i = fattore dipendente dalla riga;
β_j = fattore dipendente dalla colonna.

Se si impone che i vari tipi di concimazione non siano significativamente diversi si scrive l'ipotesi $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$.

Il modello si riduce a:

$$E\{Y_{0ij}\} = \alpha + \beta_j$$

$$(U^+U)_A = \sum_{i,j}(Y_{0ij} - \overline{y}_{\cdot j})^2 = \sum_{i,j} Y_{0ij}^2 - q \sum_j \overline{y}_{\cdot j}^2$$

$$(U^+U) = \sum_{i,j} Y_{0ij}^2 - p\sum_{i=1}^{q} \overline{y}_{i\cdot}^2 - q\sum_{j=1}^{p} \overline{y}_{\cdot j}^2 + pq\overline{y}^2$$

La formula per la verifica è:

$$\frac{(U^+U)_A - (U^+U)}{(U^+U)}(p-1) \sim F_{(q-1),(p-1)(q-1)}$$

Il valore osservato F_{oss} dovrà essere confrontato con il valore ricavato dalle tabelle $F_{(q-1),(p-1)(q-1)}(\alpha = 5\%)$.

Si calcolano le medie:

$\overline{y}_{1\cdot} = 11.75$, $\overline{y}_{2\cdot} = 16.735$, $\overline{y}_{3\cdot} = 12.000$;
$\overline{y}_{\cdot 1} = 9.833$, $\overline{y}_{\cdot 2} = 16.000$, $\overline{y}_{\cdot 3} = 11.667$, $\overline{y}_{\cdot 4} = 16.000$;
$\overline{y} = 13.375$.

Si ottiene così:

$$(U^+U) = 2316.75 - 2200.8125 - 2234.4166 + 2146.6875 = 28.2084$$

$$(U^+U)_A = 2316.75 - 2234.4166 = 82.3334$$

$$(U^+U)_A - (U^+U) = 54.1250$$

$$F_{oss} = \frac{54.1250}{28.2084} \cdot 3 = 5.7563$$

$$F_{2,5}(\alpha = 5\%) = 5.14$$

Poiché $F_{oss} > F_{2,5}(\alpha = 5\%)$, si rifiuta l'ipotesi H_0: i vari tipi di concime sono significativamente diversi.

Si valuta ora l'ipotesi $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta$, corrispondente al fatto che le piante dei quattro campi possano essere estratte dallo stesso universo ($\alpha = 5\%$).

In questo caso si ha:

$$(U^+U)_B = \sum_{i,j}(Y_{0ij} - \overline{y}_{i.})^2 = \sum_{i,j} Y_{0ij}^2 - p\sum_i \overline{y}_{i.}^2$$

La formula per la verifica è:

$$\frac{(U^+U)_B - (U^+U)}{(U^+U)}(q-1) \sim F_{(p-1),(p-1)(q-1)}$$

Il valore osservato F_{oss} dovrà essere confrontato con il valore $F_{(p-1),(p-1)(q-1)}(\alpha = 5\%)$.

Svolgendo i conti si ottiene:

$$(U^+U)_B = 2316.75 - 2200.8125 = 115.9375$$

$$(U^+U)_B - (U^+U) = 115.9375 - 28.2084 = 87.7291$$

$$F_{oss} = \frac{87.7291}{28.2084} \cdot 2 = 6.2201$$

$$F_{3,6}(\alpha = 5\%) = 4.76$$

Poiché $F_{oss} > F_{3,6}(\alpha = 5\%)$, si rifiuta anche questa ipotesi H_0.

Esercizi

Esercizio 9.6

Data la regressione lineare:

$$y = c_0 + c_1 t$$

sono state eseguite cinque osservazioni Y_{0i} in corrispondenza di altrettanti tempi t_i:

t	Y_0
-2	2.01
-1	2.92
0	3.60
1	4.09
2	5.07

a) Determinare la stima a minimi quadrati dei coefficienti della regressione e del valore di $\hat{\sigma}_0^2$.

b) Verificare la correttezza del modello deterministico sapendo che $\sigma_0^2 = 0.05$ (livello di significatività $\alpha = 5\%$).

[**R:** $\hat{c}_0 = 3.538; \hat{c}_1 = 0.729; \hat{\sigma}_0^2 = 0.0193; \hat{\sigma}_{c_1} = 0.0439$: l'ipotesi su c_1 è rifiutata]

Esercizio 9.7

In un problema di minimi quadrati si sono stimate le coordinate dei punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ sulla base delle misure di otto distanze. Il vettore degli scarti $\hat{\varepsilon}$ (in metri) è dato da:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0.008 \\ -0.011 \\ -0.015 \\ 0.009 \\ -0.020 \\ 0.014 \\ 0.007 \\ -0.002 \end{bmatrix}$$

Le osservazioni sono state eseguite in modo indipendente, tutte con la stessa precisione tranne la prima, la quarta e l'ottava, eseguite con varianza uguale alla metà delle altre.

Si sottoponga a verifica l'ipotesi $H_0 : \sigma_0 = 0.01$ m ($\alpha = 5\%$).

[**R:** $\hat{\sigma}_0^2 = 3.22 \cdot 10^{-4}$; l'ipotesi è rifiutata]

Esercizio 9.8

Date le quattro osservazioni Y_{0i} ai tempi t_i

t_i	Y_{0i}
0	4.2
1	4.6
2	5.6
3	5.8

stimare la retta di regressione di y sul tempo t dopo aver eliminato gli eventuali outliers presenti ($\sigma_0 = 0.12$; $\alpha = 5\%$).

[**R:** $\hat{\sigma}_0^2 = 0.054$; l'ipotesi che la terza equazione contenga un outlier non è accettata]

Esercizio 9.9

Si vuole verificare se il peso di un lingotto d'acciaio sia funzione della temperatura di fusione T. Si sono eseguite le seguenti misure di peso:

T(°C)	Peso (kg)
1370	10.10
1375	10.14
1380	10.15
1385	10.28

Stimare la retta di regressione del peso sulla temperatura, dopo aver eliminato l'eventuale outlier presente ($\sigma_0 \sim 0.15$, $\alpha = 1\%$).

[**R:** $\hat{\sigma}_0^2 = 0.0016$; l'outlier è nella quarta equazione]

Esercizio 9.10

La grandezza Y viene osservata cinque volte dando i valori

i	Y_{0i}
1	1.21
2	0.98
3	1.31
4	1.19
5	1.15

La matrice di covarianza del vettore delle osservazioni è

$$C_{Y_0Y_0} = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Si sospetta che nei dati osservati sia presente un outlier; lo si ricerchi istituendo un test al livello $\alpha = 5\%$ di significatività.

[**R:** Si ipotizza che il secondo dato sia un outlier; tale ipotesi viene confermata]

Esercizio 9.11

Sia dato il modello lineare:

$$y = at + b\ln(1+t)$$

e si supponga di aver eseguito, in modo indipendente e con la stessa precisione, le seguenti osservazioni:

t	Y_0
1	1.9136
2	3.3913
3	5.2759
4	6.7520

a) Sapendo che $\sigma_0 = 0.025$, si verifichi che il modello non è corretto ($\alpha = 1\%$).

b) Si ristimi il modello dopo aver eliminato l'outlier presente nelle osservazioni.

c) Si verifichi la correttezza del nuovo modello così stimato ($\alpha = 1\%$).

[**R:** $\hat{\sigma}_0^2 = 0.0188$; l'outlier è nella seconda equazione; $(\hat{\sigma}_0^2)_r = 0.0031$]

Esercizio 9.12

Di una quantità che si suppone evolvere secondo il modello

$$y = a_0 + a_1 t$$

vengono eseguite le seguenti misure:

t	Y_0
-5	2.3012
-3	1.2977
-1	0.2814
1	-0.6980
3	-1.7004
5	-2.7009

Si assume che tali misure siano indipendenti ed eseguite con la stessa precisione, corrispondente a $H_0 : \sigma_0^2 = 10^{-6}$.

a) Si provi che il test su $\hat{\sigma}_0^2$ porta a rifiutare l'ipotesi H_0, al livello di significatività $\alpha = 5\%$.

b) Posto che ciò sia dovuto alla presenza di un singolo outlier, si proceda alla sua individuazione (non alla rimozione).

[**R:** $\hat{\sigma}_0^2 = 0.73 \cdot 10^{-4}$; l'outlier è nella seconda equazione]

Esercizio 9.13

Dato il modello di regressione lineare rappresentato dal polinomio:

$$y = c_0 + c_1 t + c_2 t^2,$$

si sono osservati (in modo indipendente e con la stessa precisione) i seguenti cinque valori di Y in corrispondenza di altrettanti valori di t:

t	Y_0
-2	0.8387
-1	0.9106
0	0.9974
1	1.1321
2	1.2411

Le stime di c_0, c_1, c_2 sono risultate essere:

$$\hat{c}_0 = 1.006537,\ \hat{c}_1 = 0.102630,\ \hat{c}_2 = 0.008721\ .$$

Inoltre è:

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 0.485714 & 0.0 & -0.142857 \\ 0.0 & 0.1 & 0.0 \\ -0.142857 & 0.0 & 0.071428 \end{bmatrix}$$

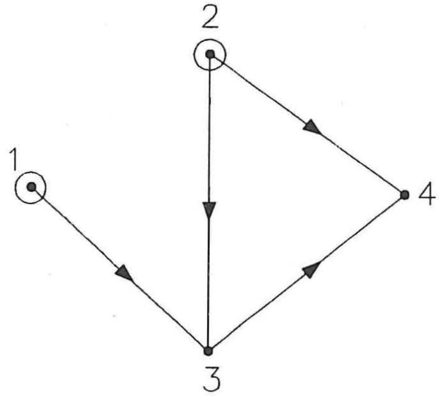
Si sospetta che un'osservazione sia un outlier.

Verificare l'ipotesi sapendo che $\sigma_0^2 = 4 \cdot 10^{-6}$ e identificare tale osservazione.

[**R:** $\hat{\sigma}_0^2 = 1.64 \cdot 10^{-4}$; il sospetto outlier è nella quarta equazione]

Esercizio 9.14

Si siano eseguite le misure di dislivelli tra punti come riportato in figura



$$Y_{01} = q_{23} = 4.967$$
$$Y_{02} = q_{13} = 7.825$$
$$Y_{03} = q_{24} = 8.446$$
$$Y_{04} = q_{34} = 3.452$$

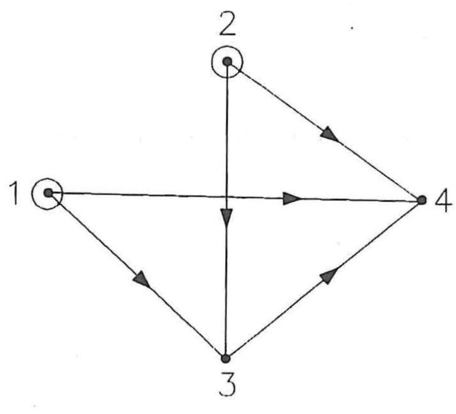
Posto che 1 e 2 siano punti di quota nota ($Q_1 = 0,\ Q_2 = 2.8545$) e che le varianze di tutti i dislivelli siano uguali a σ_0^2, tranne quella del dislivello q_{23} che ha varianza 0.5 σ_0^2 (media di due osservazioni), supponendo inoltre che le misure siano indipendenti e che $\sigma_0^2 = 10^{-5}$, si proceda come segue.

a) Stimare le quote dei punti 3 e 4.

b) Stimare σ_0^2 e verificare con $\alpha = 5\%$ la correttezza del modello deterministico.

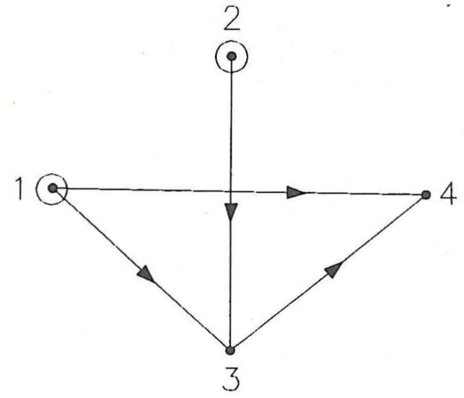
c) Constatare dall'analisi degli scarti normalizzati che non è identificabile l'equazione con outlier.

d) Aggiungere al set di misure eseguite l'osservazione $Y_{05} = q_{14} = 11.28$, indipendente dalle precedenti e fatta con la stessa precisione; stimare nuovamente le quote dei punti 3 e 4 e il valore di σ_0^2.



e) Verificare la correttezza del modello deterministico ($\alpha = 5\%$).

f) Dall'analisi degli scarti normalizzati identificare e rimuovere l'outlier.

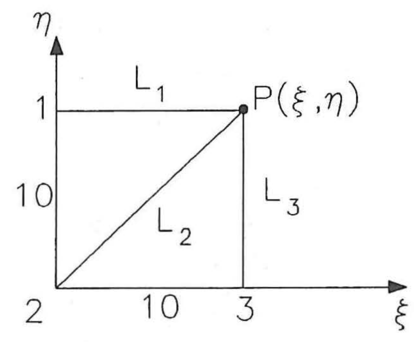


g) Verificare infine, a partire da questo nuovo modello, che l'osservazione eliminata conteneva effettivamente un outlier ($\alpha = 5\%$).

[**R:** $\hat{Q}_3 = 7.8264; \hat{Q}_4 = 11.2894; \hat{\sigma}_0^2 = 14.7 \cdot 10^{-5}$;
$(\hat{Q}_3)_r = 7.8255; (\hat{Q}_4)_r = 11.2860; (\hat{\sigma}_0^2)_r = 11.7 \cdot 10^{-5}$;
l'outlier è identificato nella terza equazione]

Esercizio 9.15

Le coordinate planimetriche (ξ, η) di un punto sono determinate misurando con un apparato di alta precisione tre distanze da tre punti noti.



Punto	ξ (m)	η (m)
1	0.	10.
2	0.	0.
3	10.	0.

I valori osservati sono indipendenti e di ugual precisione e risultano

$$Y_0 = \begin{bmatrix} L_{01} \\ L_{02} \\ L_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.0002 \\ 14.1422 \\ 9.9997 \end{bmatrix}$$

Assumendo $\tilde{\xi} = \tilde{\eta} = 10$ e posto:

$$\xi = \tilde{\xi} + 10^{-4}\delta\xi$$
$$\eta = \tilde{\eta} + 10^{-4}\delta\eta$$

(cioé $(\delta\xi, \delta\eta)$ sono le correzioni da apportare a $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ espresse in decimi di millimetro) si trovino le stime $(\delta\hat{\xi}, \delta\hat{\eta})$ secondo i minimi quadrati e si disegni nel piano $(\delta\xi, \delta\eta)$ la regione di confidenza per un livello di significatività $\alpha = 5\%$.

[**R:** $\delta\hat{\xi} = 2.475; \delta\hat{\eta} = -2.525; \hat{\sigma}_0^2 = 0.907$. La regione di confidenza è il dominio contenuto all'interno di un'ellisse con centro nel punto (2.475; -2.525), con assi diretti parallelamente ai vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e con semiassi rispettivamente uguali a 13.45 e a 19.03]

Esercizio 9.16

Una ditta produttrice di macchinari meccanici compie un'indagine esaminando i risultati delle sue campagne di vendita in cinque anni in due paesi. In termini di pezzi venduti si ha, ordinando per comodità gli anni rispetto a quello centrale:

	N. pezzi venduti	
Anno	Paese 1	Paese 2
-2	1133	1720
-1	1240	1915
0	1370	2080
1	1497	2251
2	1608	2461

Poiché il Paese 2 ha un numero di abitanti 1.5 più alto di quello del Paese 1, si fa l'ipotesi H_0 che i due mercati seguano la stessa evoluzione, a meno di un fattore di proporzionalità, ovvero che i valori medi seguano il modello di regressione lineare:

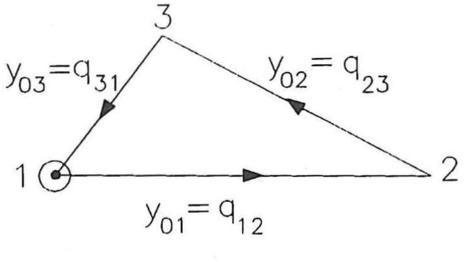
$$\begin{aligned} \text{N. pezzi (1)} &= c_0 + c_1 t \\ \text{N. pezzi (2)} &= (c_0 + c_1 t) \cdot 1.5 \ . \end{aligned}$$

Si verifichi se l'ipotesi H_0 è accettabile al livello di significatività $\alpha = 5\%$ ed, in caso non lo sia, si verifichi se differisca in particolare il livello medio delle vendite sul quinquennio, cioé c_0, oppure il tasso di incremento c_1.

[**R:** $F_{oss} = 7.79$ eccede il valore critico $F_{2,6}(0.95) = 5.14$, quindi H_0 va rifiutata. È poi chiaro che è c_0 ad essere differente nei due casi]

Esercizio 9.17.

In un problema di controllo si misurano i dislivelli fra tre punti, dei quali il punto 1 è da ritenersi fisso per motivi fisici ($Q_1 = 0$), mentre i punti 2 e 3 sono effettivamente da controllare.



I valori osservati ai due tempi t_1 e t_2 sono (in metri):

$Y_0(t_1)$	$Y_0(t_2)$
1.5734	1.5763
-0.4205	-0.4236
-1.1526	-1.1525

Si vogliono verificare le quote Q_2 e Q_3 al variare di t (si vuole cioé verificare se uno o entrambi i punti si sono spostati).

[**R:** $\hat{Q}_2(t_1) = 1.5733$; $\hat{Q}_3(t_1) = 1.1527$; $\hat{\sigma}_0^2(t_1) = 3 \cdot 10^{-8}$; $\hat{Q}_2(t_2) = 1.5762$; $\hat{Q}_3(t_2) = 1.1526$; $\hat{\sigma}_0^2(t_2) = 1.3 \cdot 10^{-8}$; risulta essersi mosso il punto 2: $F^{oss}_{(2,2)} = 207.93$; $F^{oss}_{(1,2)}(Q_2) = 297.85$; $F^{oss}_{(1,2)}(Q_3) = 0.615$]

Esercizio 9.18

Sono date tre osservazioni di Y ai tempi t_i:

t	Y_0
0	4.2
1	4.6
2	5.6

a) Si determinino i coefficienti della regressione lineare $y = c_0 + c_1 t$.

b) Si sottoponga a verifica l'ipotesi che il valore teorico del coefficiente c_0 sia uguale a 4.0, con $\alpha = 5\%$.

[**R:** $\hat{c}_0 = 4.1$; $\hat{c}_1 = 0.7$; l'ipotesi H_0 è accettata: $t_{oss} = 0.4472$]

Esercizio 9.19

Si vuole verificare che l'allungamento di un filo di rame sia funzione lineare della temperatura

$$L(t) = L_0 + \Lambda t \ .$$

Da otto misure effettuate a otto temperature diverse si sono ottenuti i seguenti valori:

t(°C)	L (cm)
10	40.005
20	40.022
30	40.018
40	40.030
50	40.029
60	40.052
70	40.047
80	40.044

A partire da questi dati si stimino i coefficienti L_0 e Λ della regressione e σ_0; inoltre si verifichi l'ipotesi che il coefficiente di t sia uguale a 6.8 10^{-4} cm/°C, al livello di significatività $\alpha = 5\%$.

[**R:** $\hat{L}_0 = 40.0041; \hat{\Lambda} = 0.0006; \hat{\sigma}_0 = 0.7246 \cdot 10^{-2}$; l'ipotesi su Λ è accettata: t_6^{oss} = -0.7691]

Esercizio 9.20

Si hanno due forme di formaggio A e B, ciascuna del peso di 1 kg, che vengono divise approssimativamente in due metà: A_1, A_2; B_1, B_2.

Vengono effettuate le seguenti pesate:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= A_1 + B_1 = 1.011 \text{ kg} \\
y_2 &= A_1 + B_2 = 1.013 \text{ kg} \\
y_3 &= B_1 + A_2 = 0.989 \text{ kg}
\end{aligned}
$$

Si sa che la pesata y_3 è effettuata con una precisione pari alla metà delle altre due.

a) Stimare A_1 e B_1 con il metodo dei minimi quadrati.

b) Verificare con un test se $A_1 = A_2$ e $B_1 = B_2$, con $\alpha = 5\%$.

[**R:** $\hat{A}_1 = 0.5117; \hat{B}_1 = 0.4993$; l'ipotesi è accettata: $F_{(2,1)}^{oss} = 187.25$]

Esercizio 9.21

È stata osservata tre volte una grandezza x ottenendo i valori:

$$
X_0 = \begin{bmatrix} X_{01} \\ X_{02} \\ X_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.97 \\ 10.03 \\ 9.97 \end{bmatrix}
$$

Sapendo che il vettore X_0 è estratto da una variabile casuale X che ha covarianza

$$
C_{XX} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}
$$

si dia la stima a minimi quadrati di x e di σ_0^2. Si dica se il valore così ottenuto è significativamente diverso dalla semplice media artimetica $\overline{x} = 9.99$.

[**R:** $\hat{x} = 9.994$; $\hat{\sigma}_0^2 = 7.2 \cdot 10^{-4}$; $\hat{\sigma}_x = 0.008485$; l'ipotesi è accettata: $t_2^{oss} = 0.4714$]

Esercizio 9.22

Un ingegnere elettronico ritiene che la vita di un componente elettronico (g in giorni) sia funzione lineare della temperatura dell'ambiente di funzionamento del componente stesso (ξ in decimi di grado). In tabella sono riportati i risultati di dieci esperimenti:

$\xi(0.10°C)$	g (giorni)
175	673.58
185	699.95
190	704.33
200	696.21
210	738.76
215	768.67
220	769.36
230	753.83
235	719.04
240	743.59

a) Stimare i coefficienti della regressione lineare.

b) Verificare la significatività della regressione con $\alpha = 5\%$.

c) Calcolare il coefficiente di correlazione parziale.

[**R:** $g = 1.085\xi + 498.882$; la regressione su ξ è significativa: $F_{(1,8)}^{oss} = 9.019$; $R^2 = 0.530$]

Esercizio 9.23

Dato il modello di regressione lineare rappresentato dal polinomio:

$$y = c_0 + c_1 t^2 + c_2 t^4 \ ,$$

si sono osservati i seguenti cinque valori di y in corrispondenza di altrettanti valori di t:

t	Y_0
-2	2.01
-1	1.16
0	0.96
1	1.14
2	1.98

Le stime di c_0, c_1, c_2 sono risultate essere:

$$\hat{c}_0 = 0.96, \;\; \hat{c}_1 = 0.167083, \;\; \hat{c}_2 = 0.022917.$$

Si è poi stimato il modello:

$$y = b_0 + b_1 t^2 \; ,$$

ottenendo: $\hat{b}_0 = 0.912857$, $\hat{b}_1 = 0.268571$.

Stabilire quale dei due modelli sia più significativo ($\alpha = 1\%$).

[**R:** $F^{oss}_{(1,2)} = 13.30$: la regressione su t^4 non è significativa]

Esercizio 9.24

Per descrivere un certo fenomeno viene usato il modello (I):

$$y = c_1 t + c_2 e^{-t} \; .$$

a) Stimare c_1 e c_2 con il metodo dei minimi quadrati e il corrispondente valore di $\hat{\sigma}_0^2$ (supponendo che le misure siano indipendenti e di uguale precisione) utilizzando la seguente tabella di osservazioni:

t	$Y_0(t)$
1.6	1.68091
1.8	1.86594
2.0	2.05417
2.2	2.24426

(non si eseguano traslazioni dell'asse dei tempi).

b) Si è poi utilizzato il modello (II):

$$y = c_1 t$$

stimando (dalle stesse osservazioni) il parametro $\hat{c}_1 = 1.508857$. Sottoporre a test l'ipotesi che la quantità y non dipenda significativamente dal coefficiente c_2 del modello (I), usando un valore $\alpha = 5\%$.

[**R:** $\hat{c}_1 = 0.9999; \hat{c}_2 = 0.4009; \hat{\sigma}_0^2 = 2.46 \cdot 10^{-8}; F_{(1,1)}^{oss} = 1.40$: la regressione non dipende da c_2]

Esercizio 9.25

Un processo chimico viene studiato per migliorarne il rendimento. Si utilizzano tre diversi catalizzatori. Ripetendo cinque volte l'esperimento si ottengono i seguenti rendimenti:

Tipo di catalizzatore	Rendimenti				
1	19	21	20	20	25
2	20	30	33	26	40
3	15	28	18	28	17

Sottoporre a verifica l'ipotesi che i tre tipi di catalizzatore producano lo stesso effetto, con $\alpha = 5\%$.

[**R:** $F_{(2,12)}^{oss} = 3.7337$: i tre tipi di catalizzatore producono lo stesso effetto]

Esercizio 9.26

In tabella sono riportati i raccolti (in quintali di frumento per ettaro) in terreni concimati chimicamente con i prodotti A, B, C. Determinare con $\alpha = 5\%$ se i trattamenti A, B, C hanno effetti significativamente diversi.

Tipo di concime	Raccolto			
A	48	49	50	49
B	47	49	48	48
C	49	51	50	50

[**R:** $F_{(2,9)}^{oss} = 6.00$: i trattamenti hanno effetti significativamente diversi]

Esercizio 9.27

In tabella sono riportate le precipitazioni (in centimetri) in tre diverse zone per le quattro stagioni di un anno. Valutare se si ha la stessa piovosità nelle zone considerate ($\alpha = 5\%$) e se questa è indipendente dal periodo dell'anno ($\alpha = 5\%$).

	Stagioni			
Zone	Pri	Est	Aut	Inv
1	100.5	20.5	58.5	22
2	95.0	24.5	32.5	27
3	120.5	12.5	64.0	12

[**R:** $F^{oss}_{(2,6)} = 0.3671$: la piovosità è indipendente dalle zone; $F^{oss}_{(3,6)} = 29.4744$: la piovosità dipende dalle stagioni]

Esercizio 9.28

Quattro diverse varietà di grano B_1, B_2, B_3, B_4 sono impiegate in cinque terreni a diversa composizione. Si vuole valutare, con la significatività del 5%, se la produzione è influenzata dal tipo di terreno o dalla varietà di semente usata. Nella tabella sono riportati i raccolti in quintali per ettaro.

	Varietà di grano			
Terreno	B_1	B_2	B_3	B_4
A1	32.3	33.3	30.8	29.3
A2	34.0	33.0	34.3	26.0
A3	34.3	36.3	35.3	29.8
A4	35.0	36.8	32.3	28.0
A5	36.5	34.5	35.8	28.8

[**R:** $F^{oss}_{(4,12)} = 2.4517$: la produzione non è influenzata dal tipo di terreno; $F^{oss}_{(3,12)} = 20.4780$: la produzione è influenzata dal tipo di semente]

10 CATENE DI MARKOV

Descrizione di una catena di Markov

Le catene di Markov che vengono considerate sono associate a sequenze finite di tempi $k = 0, 1, 2, \ldots, N$; i possibili risultati si rappresentano in $\mathbb{R}^{N+1}$ come una successione di punti ognuno di coordinate $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N)$, dove $x_k = i$, $i = 1, 2, \ldots, m$; la descrizione probabilistica di queste catene sarà quindi data dall'insieme delle probabilità discrete

$$P\{X_0 = x_0,\ X_1 = x_1, \ldots, X_N = x_N\} = p^{(N)}(x_0, x_1, \ldots, x_N)$$

Gli esercizi presentati in questo capitolo riguardano lo studio della loro evoluzione temporale, ovvero della determinazione della distribuzione di probabilità tra gli stati ad un tempo $t = k$ fissato.

Una catena di Markov può essere descritta in due modi equivalenti:

1) Matrice di transizione

Si abbia la seguente catena di Markov:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & x_0 & x_1 & \ldots & x_t & \ldots \\
s_1 & p_1^{(0)} & p_1^{(1)} & \ldots & p_1^{(t)} & \ldots \\
s_2 & p_2^{(0)} & p_2^{(1)} & \ldots & p_2^{(t)} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
s_i & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
s_m & p_m^{(0)} & p_m^{(1)} & \ldots & p_m^{(t)} & \ldots
\end{array}$$

in cui con s_i si indicano i possibili stati del sistema $(i = 1, 2, \ldots, m)$ e con $p_i^{(t)}$ la probabilità che al tempo t il sistema si trovi nello stato s_i.

Si chiama matrice di transizione $P^{(k)}$ la matrice $m \times m$ i cui elementi sono dati da:

$$p_{ji}^{(k)} = P\{X_{k+1} = i | X_k = j\}$$

Essa realizza la transizione della distribuzione all'istante k a quella all'istante $k+1$ e precisamente [6]

$$p^{(k+1)} = \sum_j p_{ji}^{(k)} p_j^{(k)}$$
$$\underline{p}^{(k+1)} = P^{(k)+} \underline{p}^{(k)}$$

Se sono note la matrice di transizione $P^{(k)}$ $\forall k$ e la distribuzione di probabilità ad un istante t, è possibile determinare tutte le distribuzioni $p^{(t)}$.

Definizione: una catena di Markov con matrice di transizione costante per ogni k è detta omogenea [7].

In questo caso si ha:

$$P = \begin{bmatrix} p_{ii} & p_{ij} & p_{ik} \\ p_{ji} & p_{jj} & p_{jk} \\ p_{ki} & p_{kj} & p_{kk} \end{bmatrix}$$

- ogni elemento p_{ij} della matrice di transizione P è la probabilità che il sistema passi dallo stato i allo stato j in una sola transizione;
- ogni elemento p_{ij} della potenza n-esima P^n della matrice di transizione P è la probabilità che il sistema passi dallo stato i allo stato j in n transizioni;
- se p è la distribuzione di probabilità del sistema in un certo periodo arbitrario, allora pP è la distribuzione di probabilità del sistema dopo una transizione e pP^n è la distribuzione di probabilità del sistema dopo n transizioni. Per esempio:

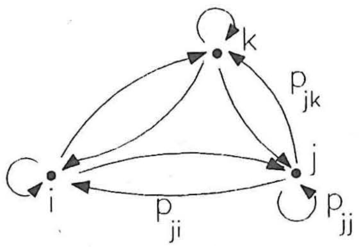
  $p^{(1)} =$ distribuzione di probabilità alla I transizione $= p^{(0)}P$
  $p^{(2)} = p^{(1)}P = p^{(0)}P^2$
  ....
  $p^{(n)} = p^{(n-1)}P = p^{(0)}P^n$

[6]Si osservi che in questo capitolo, se non è specificato diversamente, i vettori $\underline{x}$ sono da intendersi come vettori riga.

[7]In questo capitolo vengono illustrati solo esempi di catene omogenee.

2) Diagramma di transizione

Graficamente la matrice di transizione P si può rappresentare tramite un diagramma (o grafo) nel seguente modo:



Generalizzando, è possibile ricavare la seguente regola che permette di istituire una corrispondenza biunivoca tra matrici di transizione e grafi (orientati):

- nella matrice di transizione si considerano tutti e solo quegli elementi
$$p_{ji} = P\{X_{k+1} = i | X_k = j\} > 0$$
lasciando sottointeso che gli altri elementi sono necessariamente nulli; così si crea un inventario delle coppie (j, i) (j stato di entrata al tempo k, i stato di uscita al tempo $k + 1$) tra cui esiste una probabilità positiva di transizione dal tempo k al tempo $k + 1$;

- gli stati del sistema vengono rappresentati con m punti nel piano, che saranno i nodi del grafo: ad ogni coppia (j, i) si fa corrispondere una connessione (lato del grafo) orientata con una freccia da j a i; ad ogni lato con freccia si associa un numero (intensità di flusso) corrispondente a p_{ji}.

La corrispondenza inversa è del tutto evidente.

Classificazione degli stati

Definizione: si dice che lo stato j è comunicante con lo stato i se esiste un tempo finito n per cui la probabilità di andare da j a i in n passi è positiva

$$p_{ji}^{(n)} > 0$$

Definizione: uno stato i si dice "inessenziale" se esistono un altro stato j e un tempo n per cui $p_{ij}^{(n)} > 0$, ma $p_{ji}^{(k)} = 0 \ \forall k$; quindi uno stato è inessenziale quando esiste una probabilità diversa da zero di uscire da i e di andare in j ma, una volta usciti da i, non è possibile tornare da j ad i.

Definizione: è detto "stato essenziale" ogni stato che non sia inessenziale; ovvero uno stato essenziale è uno stato a cui si ha sempre la possibilità di tornare in un tempo finito.

Sia M l'insieme degli stati della catena, esso è l'unione di stati inessenziali ed essenziali

$$M = I \cup E$$

Definizione: se i comunica con j e j comunica con i, la coppia (i,j) è detta "coppia di stati comunicanti".

Osservazione: si dimostra che gli stati essenziali si dividono in classi di equivalenza disgiunte.

Osservazione: si dimostra che non può esistere una catena di Markov fatta solo di stati inessenziali.

Definizione: quando il sistema raggiunge uno stato e qui rimane con probabilità 1 questo stato è detto "assorbente". La presenza di uno stato assorbente caratterizza la matrice di transizione con la presenza del valore 1 sulla diagonale principale, in corrispondenza dello stesso stato.

Il comportamento asintotico di una catena di Markov (cioé il comportamento della catena quando il tempo di evoluzione tende ad ∞) si riassume nel fatto che prima o poi lo stato della catena cadrà in una della classi disgiunte degli stati essenziali e ciò avverrà con probabilità calcolabile. Una volta raggiunta una delle classi di stati essenziali si può ulteriormente studiare il comportamento della catena in tale classe.

Definizione: si dice "stato limite" il vettore di probabilità $\underline{t}$ tale che $\underline{t} = \underline{t}P$.

Osservazione: quando in una catena di Markov ci sono più stati assorbenti la matrice non è regolare e quindi non esiste un unico stato limite.

Definizione: se esiste lo stato limite la catena è detta catena ergodica.

Condizione necessaria e sufficiente affinché esista lo stato limite è che la matrice di transizione abbia tutti gli elementi positivi. Condizione sufficiente affinché esista lo stato limite è che esista almeno un n tale che P^n abbia tutti gli elementi maggiori di zero.

Catene di nascita o morte

Una catena di nascita o morte è una catena di Markov in cui ogni stato comunica solo con se stesso e con gli stati adiacenti. Gli estremi di questa catena possono suddividersi in barriere riflettenti e barriere assorbenti [8].

Osservazione: se in una catena vi è un solo estremo assorbente e gli stati sono tutti comunicanti, lo stato limite finisce nell'estremo assorbente con probabilità 1. In questo caso infatti tutti gli stati sono inessenziali tranne quello assorbente.

Osservazione: se in una catena vi sono due o più stati assorbenti, questi costituiscono classi disgiunte, mentre tutti gli altri stati sono inessenziali.

Si consideri una catena di nascita o morte con due stati assorbenti a e b; si vuole calcolare la probabilità π_i del sistema di essere assorbito da a o b essendo partiti dallo stato x_i.

Si dimostra che tali probabilità sono quelle lasciate invarianti dall'applicazione della matrice di transizione trasposta:

$$\underline{\pi} = \underline{\pi} P^+$$

[8] Negli esercizi svolti sono ampiamente illustrati diversi esempi di queste particolari catene.

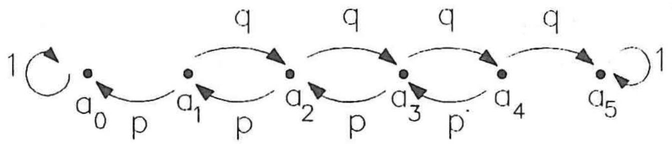
Problemi risolti

Esercizio 10.1 (Random walk con barriere assorbenti)

Siano A e B due giocatori che giocano la seguente partita: ogni mano si vince o si perde una lira. La probabilità di vincita di A è uguale a q; la probabilità di perdita è $p = 1 - q$. Il capitale totale a disposizione è di 5 lire, inizialmente suddiviso in 3 lire per A e 2 lire per B. Il gioco termina quando uno dei due giocatori si è rovinato, cioé si riduce con capitale nullo. Calcolare la probabilità di rovina di A.

Svolgimento

Gli stati del sistema sono: $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$, dove a_i = il giocatore A possiede i lire.



La matrice di transizione è

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per risolvere l'esercizio si deve calcolare la probabilità di assorbimento nello stato a_0 partendo dallo stato a_3. Si risolve quindi la seguente equazione: $\underline{\pi} = \underline{\pi} P^+$, dove

$$\underline{\pi} = (\pi_0(0) \;\; \pi_0(1) \;\; \pi_0(2) \;\; \pi_0(3) \;\; \pi_0(4) \;\; \pi_0(5))$$

$$\begin{cases} \pi_0(0) = 1 & \text{(per le condizioni iniziali = regole del gioco)} \\ \pi_0(1) = \pi_0(0)p + \pi_0(2)q \\ \pi_0(2) = \pi_0(1)p + \pi_0(3)q \\ \pi_0(3) = \pi_0(2)p + \pi_0(4)q \\ \pi_0(4) = \pi_0(3)p + \pi_0(5)q \\ \pi_0(5) = 0 & \text{(per le condizioni iniziali)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} \pi_0(1) = p + q\pi_0(2) \\ \pi_0(2) = p\pi_0(1) + q\pi_0(3) \\ \pi_0(3) = p\pi_0(2) + q\pi_0(4) \\ \pi_0(4) = p\pi_0(3) \end{cases}$$

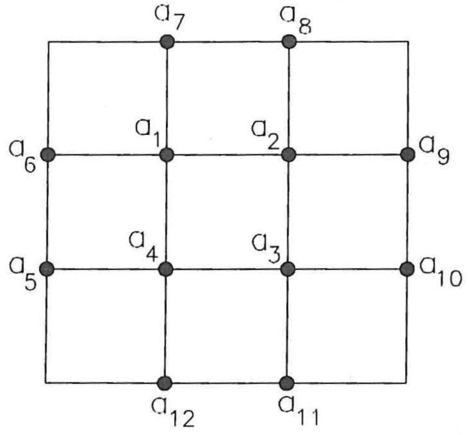
La probabilità richiesta dall'esercizio è $\pi_0(3)$ e risulta essere

$$\pi_0(3) = \frac{p^3}{1 - 3pq + (pq)^2}$$

Si osservi che se $p = q = \frac{1}{2}$ si ha $\pi_0(3) = \frac{2}{5}$.

Esercizio 10.2 (Random walk con barriere riflettenti)

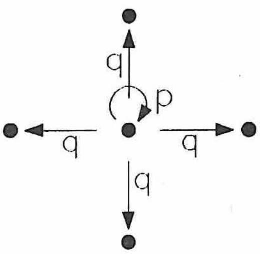
Un robot industriale è vincolato a muoversi lungo il circuito disegnato in figura



Per ciascuno degli stati centrali a_1, a_2, a_3, a_4 vale:

$$p + 4q = 1 \ ,$$

mentre ciascuno degli stati sui bordi "riflette" con probabilità 1.



Scrivere la matrice di transizione della catena e trovare lo stato limite del sistema.

Svolgimento

Gli stati complessivi del sistema sono 12 e la matrice di transizione è la seguente:

$$
P = \left[\begin{array}{ccccccccccccc}
p & q & 0 & q & \vdots & 0 & q & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
q & p & q & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & q & q & 0 & 0 & 0 \\
0 & q & p & q & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & q & 0 \\
q & 0 & q & p & \vdots & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & & & & & & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & & & & & & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & & & & & & & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & & & & 0 & & & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & & & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & & & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & & & & & & & &
\end{array}\right]
$$

L'equazione che determina lo stato limite è $\underline{t} = \underline{t}P$, che, per le simmetrie della matrice P, si può anche scrivere

$$
[\underline{x}_1,\ \underline{x}_2] = [\underline{x}_1,\ \underline{x}_2] \left[\begin{array}{ccc}
A_{11} & \vdots & A_{12} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
A_{21} & \vdots & 0
\end{array}\right]
$$

dove, essendo p_i la probabilità di trovarsi nello stato a_i:

$$\underline{x}_1 = (p_1\ p_2\ p_3\ p_4)$$
$$\underline{x}_2 = (p_5\ p_6\ p_7\ p_8\ p_9\ p_{10}\ p_{11}\ p_{12})$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} p & q & 0 & q \\ q & p & q & 0 \\ 0 & q & p & q \\ q & 0 & q & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-4q & q & 0 & q \\ q & 1-4q & q & 0 \\ 0 & q & 1-4q & q \\ q & 0 & q & 1-4q \end{bmatrix} =$$
$$= I - qD = I - q \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & q & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & q & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q \end{bmatrix} = qA_{21}^{+}$$

Il sistema da risolvere è il seguente:

$$\begin{cases} \underline{x}_1 = \underline{x}_1 A_{11} + \underline{x}_2 A_{21} \\ \underline{x}_2 = \underline{x}_1 A_{12} \end{cases}$$

Si osservi che

$$A_{12}A_{21} = q \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\underline{x}_2 A_{21} = \underline{x}_1 A_{12} A_{21}$$

$$\underline{x}_2 A_{21} = \underline{x}_1 q \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

sostituendo nella prima equazione del sistema si ha:

$$\underline{x}_1 = \underline{x}_1(I - qD) + 2qI\underline{x}_1$$

$$\underline{x}_1 q(2I - D) = 0 \Rightarrow \underline{x}_1(2I - D) = 0$$

$$(2I - D) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2p_1 + p_2 + p_4 = 0 \\ p_1 - 2p_2 + p_3 = 0 \\ p_2 - 2p_3 + p_4 = 0 \\ p_1 + p_3 - 2p_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = k$$

Dalla seconda equazione del sistema:

$$\underline{x}_2 = q(k \quad k \quad k \quad k) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow p_5 = kq = p_i \qquad\qquad i = 6, \ldots, 12$$

Quindi lo stato limite è:

$$(k \;\; k \;\; k \;\; k \;\; qk \;\; qk \ldots \; qk)$$

Per determinare la costante k si impone la condizione di normalizzazione $\sum_{i=1}^{12} p_i = 1$

$$4k + 8qk = 1 \longrightarrow k = \frac{1}{4+8q}$$

Esercizio 10.3 (Cereal box problem)

Un'industria alimentare decide di promuovere un suo prodotto inserendo casualmente tre figurine (A, B e C) una in ciascuna scatola del prodotto, cosicché la probabilità che una certa scatola contenga una certa figurina è $1/3$. Se il cliente compra questo prodotto fino a quando non completa la collezione delle figurine, qual è la probabilità che egli comperi n scatole?

Svolgimento

Si è nello stato a_m quando si posseggono m figurine differenti:

a_0 = non si posseggono figurine di nessun tipo;

a_1 = si posseggono figurine di un solo tipo (per esempio 4 figurine di A o 7 di C);

a_2 = si posseggono figurine di 2 tipi;

a_3 = si posseggono le 3 differenti figurine: la collezione è completata.

Matrice di transizione:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si indica con $(\pi_0^{(k-1)} \;\; \pi_1^{(k-1)} \;\; \pi_2^{(k-1)} \;\; \pi_3^{(k-1)})$ le componenti della distribuzione di probabilità al passo $(k-1)$.

E' noto che

$$(\pi_0^{(k)} \ \pi_1^{(k)} \ \pi_2^{(k)} \ \pi_3^{(k)}) = (\pi_0^{(k-1)} \ \pi_1^{(k-1)} \ \pi_2^{(k-1)} \ \pi_3^{(k-1)})P$$

e quindi che:

$$\begin{cases} \pi_0^{(k)} = 0 \\ \pi_1^{(k)} = \pi_0^{(k-1)} + \frac{1}{3}\pi_1^{(k-1)} \\ \pi_2^{(k)} = \frac{2}{3}\pi_1^{(k-1)} + \frac{2}{3}\pi_2^{(k-1)} \\ \pi_3^{(k)} = \frac{1}{3}\pi_2^{(k-1)} + \pi_3^{(k-1)} \end{cases}$$

Le condizioni iniziali sono: $\pi_0^{(0)} = 1$, $\pi_i^{(0)} = 0 \quad \forall i \neq 0$ quindi la distribuzione iniziale è $(1 \ 0 \ 0 \ 0)$. Inoltre ovviamente vale $\pi_1^{(1)} = 1$.

Dalle prime due equazioni si ha: $\pi_1^{(k)} = \frac{1}{3}\pi_1^{(k-1)}$; questa relazione si può iterare, ottenendo:

$$\pi_1^{(k)} = \frac{1}{3}\pi_1^{(k-1)} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \pi_1^{(k-2)} = \ldots = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \pi_1^{(1)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

Sostituendo nella terza equazione si ha:

$$\pi_2^{(k)} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{2}{3}\pi_2^{(k-1)}$$
$$\pi_2^{(k)} - \frac{2}{3}\pi_2^{(k-1)} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}$$

Questa è un'equazione alle differenze finite e si risolve con tecniche analoghe alle tecniche usate per le equazioni differenziali del secondo ordine. Il procedimento è il seguente:

si cerca una soluzione particolare dell'equazione del tipo:

$$\pi^{(k)} = B\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

sostituendo si ha:

$$B\left(\frac{1}{3}\right)^k - \frac{2}{3}B\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}$$
$$-\frac{1}{9}B\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}$$

$$B = -6$$

Si cerca ora una soluzione della corrispondente equazione omogenea

$$\pi^{(k)} - \frac{2}{3}\pi^{(k-1)} = 0 \ ,$$

che si può anche scrivere:

$$\pi^{(k)} = \frac{2}{3}\pi^{(k-1)} = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)\pi^{(k-2)} = \ldots = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\pi^{(1)}$$

La soluzione generale è data dalla somma della soluzione particolare e della soluzione dell'equazione omogenea

$$\pi_2^{(k)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\pi^{(1)} - 6\left(\frac{1}{3}\right)^{k}$$

per $k = 1$ si ha

$$\pi_2^{(1)} = \pi^{(1)} - 2 = 0 \Rightarrow \pi^{(1)} = 2$$

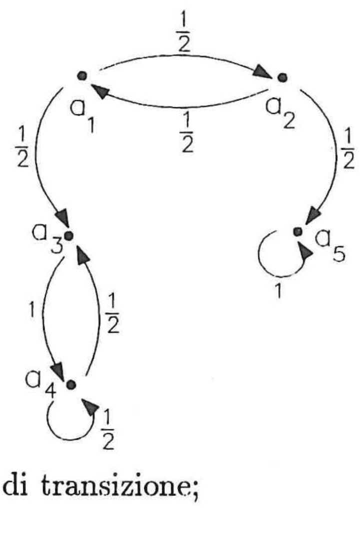
e quindi complessivamente $\pi_2^{(k)} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 6\left(\frac{1}{3}\right)^{k}$.

La probabilità di completare la raccolta comprando l'n-esima scatola di prodotto è data da:

$$\begin{aligned}\pi_3^{(n)} &= \frac{1}{3}\pi_2^{(n-1)} + \pi_3^{(n-1)} = \frac{1}{3}\left[2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - 6\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right] = \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \qquad n \geq 2\end{aligned}$$

Esercizio 10.4

Data la seguente catena di Markov:



a) si scriva la matrice di transizione;

b) si individuino gli stati inessenziali e le eventuali classi disgiunte di stati essenziali $E_1, E_2, \ldots$;

c) si costruisca la catena ridotta in cui:

$$\begin{array}{ll} a_3 \cup a_4 & \rightarrow a_1' \\ a_1 & \rightarrow a_2' \\ a_2 & \rightarrow a_3' \\ a_5 & \rightarrow a_4' \end{array}$$

d) supposto $X_0 = a_2'$ si calcoli:

$$\lim_{n \to \infty} P\{X_n \in a_1' | X_0 = a_2'\}$$
$$\lim_{n \to \infty} P\{X_n \in a_4' | X_0 = a_2'\}$$

Svolgimento

La matrice di transizione è data da:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

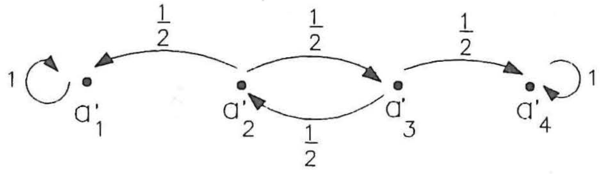
Gli stati inessenziali, cioé gli stati che prima o poi vengono abbandonati, sono a_1, a_2; mentre le classi disgiunte di stati essenziali che si possono individuare sono

$$E_1 = a_3 \cup a_4 = \text{ stato assorbente}$$
$$E_2 = a_5 = \text{ stato assorbente}$$

Quindi il diagramma di transizione della catena ridotta, a cui corrisponde la matrice di transizione (ridotta):

$$P^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

è il seguente:



Si calcolano le probabilità di assorbimento degli stati a_1' a_4', risolvendo il sistema:

$$(\pi_1 \ \ \pi_2 \ \ \pi_3 \ \ \pi_4) = (\pi_1 \ \ \pi_2 \ \ \pi_3 \ \ \pi_4)(P^*)^+$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \pi_1 \\ \pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_3 = \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_4 \\ \pi_4 = \pi_4 \end{cases}$$

Le probabilità di assorbimento di a_1' si determinano imponendo come condizioni iniziali:

$$\pi_1 = 1 \quad , \quad \pi_4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \pi_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_3 = \frac{1}{2}\pi_2 \end{cases}$$

$$\pi_2 = \frac{2}{3} \quad , \quad \pi_3 = \frac{1}{3}$$

Invece le probabilità di assorbimento di a_4' si calcolano imponendo come condizioni iniziali: $\pi_1 = 0, \pi_4 = 1$.

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \pi_2 = \frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_3 = \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\pi_2 = \frac{1}{3} \quad , \quad \pi_3 = \frac{2}{3}$$

Esercizio 10.5

Data la catena di Markov (a cinque stati) caratterizzata dalle seguenti probabilità di transizione

$$
\begin{aligned}
p_{11} &= \frac{1}{2} \quad , \quad p_{12} = \frac{1}{2} \\
p_{i1} &= \frac{1}{i} \quad , \quad p_{i,i+1} = \frac{i-1}{i} \\
p_{55} &= \frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

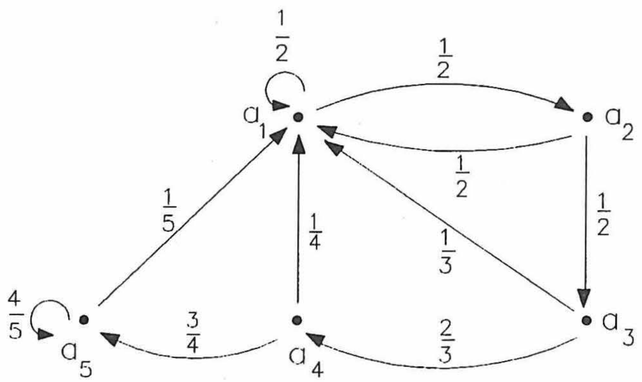
a) si scrivano la matrice di transizione e il diagramma di transizione;

b) si determini la distribuzione stazionaria;

c) supponendo che inizialmente lo stato del sistema sia a_2, (cioé la distribuzione di probabilità iniziale sia : (0 1 0 0 0) si calcoli il numero minimo di transizioni necessarie affinché ci sia una probabilità non nulla di occupazione dello stato a_5.

Svolgimento

Diagramma di transizione:



Matrice di transizione:

$$
P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 1/5 & 0 & 0 & 0 & 4/5 \end{bmatrix}
$$

La distribuzione stazionaria, o stato limite $\underline{t}$, della catena è data

$$\underline{t} = \underline{t}P \qquad (\sum_{i=1}^{5} t_i = 1)$$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2 + \frac{1}{3}t_3 + \frac{1}{4}t_4 + \frac{1}{5}t_5 \\ t_2 = \frac{1}{2}t_1 \\ t_3 = \frac{1}{2}t_2 \\ t_4 = \frac{2}{3}t_3 \\ t_5 = \frac{3}{4}t_4 + \frac{4}{5}t_5 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ha:

$$\begin{aligned} \underline{t} &= \frac{24}{61}\left[1 \ \ \frac{1}{2} \ \ \frac{1}{4} \ \ \frac{1}{6} \ \ \frac{5}{8}\right] \\ &= [0.39344 \ \ 0.19672 \ \ 0.09836 \ \ 0.06557 \ \ 0.24590] \end{aligned}$$

dato lo stato iniziale $p^{(0)} = (0\ 1\ 0\ 0\ 0)$ si ha:

$$\begin{aligned} p^{(1)} &= p^{(0)}P = \left(\frac{1}{2} \ \ 0 \ \ \frac{1}{2} \ \ 0 \ \ 0\right) \\ p^{(2)} &= p^{(1)}P = \left(\frac{10}{24} \ \ \frac{1}{4} \ \ 0 \ \ \frac{1}{3} \ \ 0\right) \\ p^{(3)} &= p^{(2)}P = \left(\frac{10}{24} \ \ \frac{5}{24} \ \ \frac{1}{8} \ \ 0 \ \ \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

quindi sono necessarie almeno tre transizioni per avere una probabilità non nulla di occupazione dello stato a_5.

Esercizio 10.6

Una catena di Markov con tre stati ha matrice di transizione

$$P = \begin{bmatrix} q & p & 0 \\ 0 & q & p \\ p & 0 & q \end{bmatrix}$$

dove $p + q = 1$.

Dimostrare che se $0 < p < 1$ la catena è ergodica, con una distribuzione limite in cui tutti gli stati sono equiprobabili.

Svolgimento
Condizione sufficiente affinché la catena sia ergodica (cioé esista lo stato limite) è che $p_{ij}^{(n)} > 0 \quad \forall ij$ per qualche n.

In questo caso

$$P^2 = \begin{bmatrix} q & p & 0 \\ 0 & q & p \\ p & 0 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q & p & 0 \\ 0 & q & p \\ p & 0 & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^2 & 2pq & p^2 \\ p^2 & q^2 & 2pq \\ 2pq & p^2 & q^2 \end{bmatrix}$$

Se $0 < p < 1 \Rightarrow 0 < q < 1$ e quindi P^2 ha tutti gli elementi diversi da zero, quindi la catena è ergodica.

Stato limite:

$$\begin{aligned} &\underline{t} = \underline{t}P \\ &\underline{t} = (x \quad y \quad 1 - x - y) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} qx + p(1 - x - y) = x \\ px + qy = y \\ py + q(1 - x - y) = 1 - x - y \end{cases}$$

dalla prima equazione segue

$$\begin{aligned} &x(q - 1 - p) + p - py = 0 \\ &2px + p - py = 0 \\ &1 - y = 2x \end{aligned}$$

dalla seconda segue

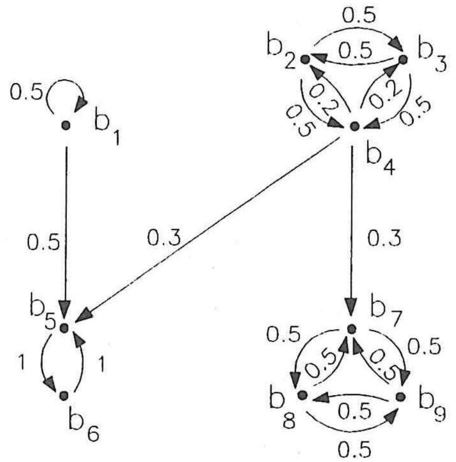
$$\begin{aligned} &p(1 - y) + 2yq - 2y = 0 \\ &y = \frac{p}{p - 2q + 2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

e quindi

$$\underline{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Esercizio 10.7

Data la seguente catena di Markov:



a) individuare la eventuale classe degli stati inessenziali I e le eventuali classi disgiunte di stati essenziali $E_1, E_2, \ldots$;

b) si costruisca la catena ridotta in cui

$$\begin{aligned} b_1 &\to a_1 \\ b_2 &\to a_2 \\ b_3 &\to a_3 \\ b_4 &\to a_4 \\ b_5 \cup b_6 &\to a_5 \\ b_7 \cup b_8 \cup b_9 &\to a_6 \end{aligned}$$

e si scriva la matrice di transizione per tale catena;

c) supposto che $X_0 = b_2 = a_2$ si dia:

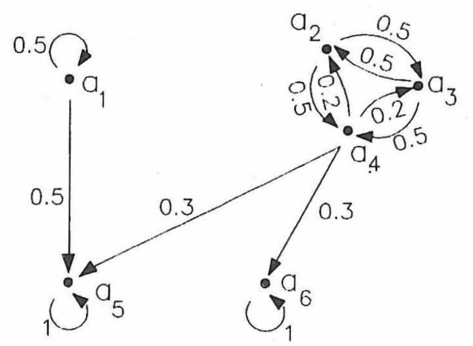
$$\lim_{n \to \infty} P\{X_n \in a_5 | X_0 = a_2\} = p_5$$
$$\lim_{n \to \infty} P\{X_n \in a_6 | X_0 = a_2\} = p_5 \ ;$$

Svolgimento
Si consideri:

$$\begin{aligned} b_1 &= \text{stato inessenziale} \longrightarrow a_1 \\ b_2 &= \text{stato inessenziale} \longrightarrow a_2 \\ b_3 &= \text{stato inessenziale} \longrightarrow a_3 \\ b_4 &= \text{stato inessenziale} \longrightarrow a_4 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} b_5 + b_6 = E_1 & \longrightarrow a_5 & \text{I classe di stati essenziali} \\ b_7 + b_8 + bq = E_2 & \longrightarrow a_6 & \text{II classe di stati essenziali} \end{array}$$

Si considera quindi una catena "ridotta" a 6 stati



la cui matrice di transizione risulta essere:

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lim_{n\to\infty} P\{X_n \in I | X_0 = a_2\} = 0 \quad \forall$ stato $\in I$ (per definizione di stato inessenziale);

$$\lim_{n\to\infty} P\{X_n \in E_1 | X_0 = a_2\} = \lim_{n\to\infty} P\{X_n \in a_5 | X_0 = a_2\} = \pi_2$$

dove π_2 è la seconda componente del vettore lasciato invariante da $P^+ : \underline{\pi} = \underline{\pi} P^+$.

$$\begin{cases} \pi_1 = 0.5\pi_1 + 0.5\pi_5 \\ \pi_2 = 0.5\pi_3 + 0.5\pi_4 \\ \pi_3 = 0.5\pi_2 + 0.5\pi_4 \\ \pi_4 = 0.2\pi_2 + 0.2\pi_3 + 0.3\pi_5 + 0.3\pi_6 \\ \pi_5 = \pi_5 \\ \pi_6 = \pi_6 \end{cases}$$

da cui si ha:

$$\pi_1 = 1 \quad , \quad \pi_2 = \pi_3 = 0.5 \quad , \quad \pi_4 = 0.5 \quad , \quad \pi_5 = 1 \quad , \quad \pi_6 = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P\{X_n \in E_2 | X_0 = a_2\} &= \lim_{n\to\infty} P\{X_n \in a_6 | X_0 = a_2\} = \\ &= 1 - 0.5 = 0.5 \end{aligned}$$

Esercizi

Esercizio 10.8

Uno studente ha le seguenti abitudini: se un giorno studia è sicuro al 70% di non studiare il giorno successivo; se un giorno non studia è sicuro al 60% di non studiare neppure il giorno successivo.

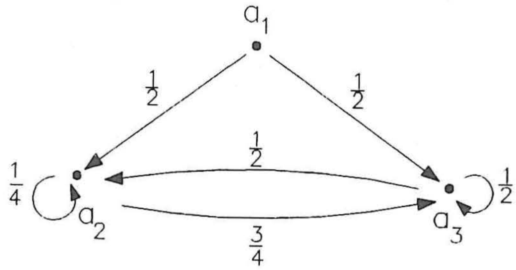
a) A lungo andare con quale frequenza studia?

b) Sapendo che la distribuzione di probabilità iniziale è $p^{(0)} = \left(\frac{3}{4} \ \ \frac{1}{4}\right)$, si calcoli la distribuzione di probabilità dopo due giorni.

[**R:** a) lo studente studia per i 4/11 del tempo; b) (0.3675 0.6325)]

Esercizio 10.9

Dato il processo di Markov con grafo



a) si dica quali sono gli stati essenziali e quelli inessenziali;

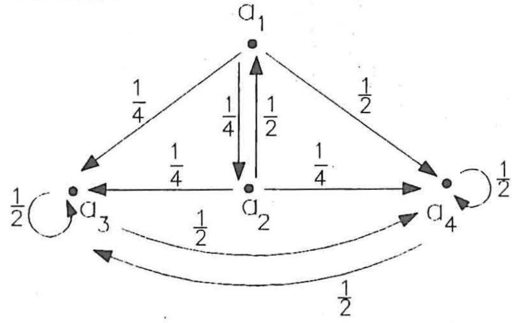
b) si scriva la matrice di transizione per l'intera catena e per la classe dagli stati essenziali;

c) si dica perché la catena costituita dagli stati essenziali ammette stato limite e si determini lo stato limite.

[**R:** $P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$; $P_{(ess)} = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$; $\underline{t} = \left(\frac{2}{5} \ \ \frac{3}{5} \right)$]

Esercizio 10.10

Data la catena di Markov



a) si trovi la matrice di transizione;

b) si determini la classe degli stati essenziali e quella degli stati inessenziali;

c) si scriva la matrice di transizione "ridotta";

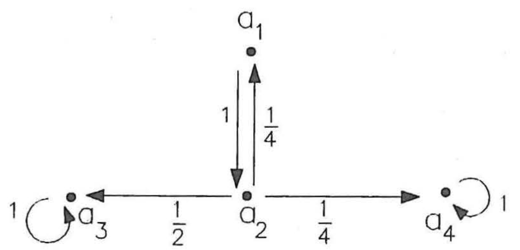
d) si determini la probabilità di transizione a due passi dagli stati inessenziali alla classe degli stati essenziali del sistema.

[**R:** a) $\begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 7/8 \\ 0 & 1/8 & 7/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$]

Esercizio 10.11

Data la catena di Markov col seguente diagramma di transizione



a) si scriva la matrice di transizione P;

b) dato che $\lim_{t\to\infty}[P\{X_t = 3|X_0 = k\} + P\{X_t = 4|X_0 = k\}] = 1$, si calcolino

$$\lim_{t\to\infty} P\{X_t = 3|X_0 = k\} = \pi_k \qquad k = 1, 2, 3, 4 \, .$$

[**R:** $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\pi_1 = \frac{2}{3}, \pi_2 = \frac{2}{3}, \pi_3 = 1, \pi_4 = 0$]

Esercizio 10.12

Una catena di Markov a 4 stati ha matrice di transizione

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

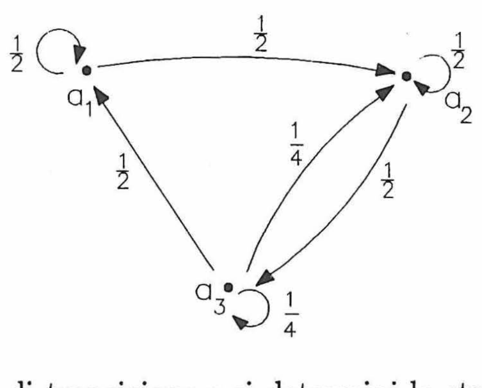
a) si trovi lo stato limite;

b) se la catena si trova nel primo stato (I riga), si trovi il minimo numero di transizioni necessarie perché ci sia una probabilità non nulla di passare nel quarto stato del sistema.

[**R:** a) $\underline{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$; b) $n = 3$]

Esercizio 10.13

Dato il diagramma di transizione seguente



si trovi la matrice di transizione e si determini lo stato limite.

[**R:** $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$; $t = \left(\frac{2}{7}\ \frac{3}{7}\ \frac{2}{7}\right)$]

Esercizio 10.14

Un'urna A contiene 2 palline bianche e un'urna B contiene 3 palline rosse. In ogni estrazione si prende una pallina da ciascuna urna e le due palline estratte vengono scambiate tra loro.

Si supponga che lo stato a_i del sistema sia il numero i di palline rosse contenute nell'urna A.

a) Si trovi la matrice di transizione P;

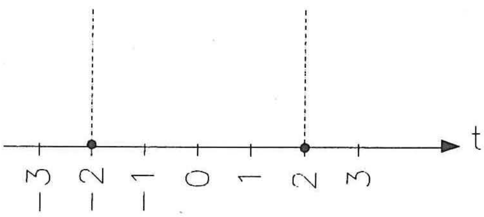
b) qual è la probabilità che vi siano 2 palline rosse nell'urna A dopo 3 transizioni?

c) a lungo andare qual è la probabilità che nell'urna A vi siano 2 palline rosse?

[**R:** a) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$; b) $p = \frac{5}{18}$; c) $p = \frac{3}{10}$]

Esercizio 10.15

Una particella parte dall'origine al tempo $t = 0$; la particella si muove di un'unità verso destra con probabilità p e di un'unità verso sinistra con probabilità q ad ogni istante successivo

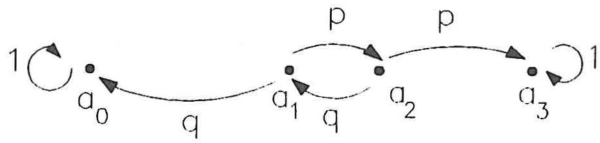


Quando la particella arriva nei punti -2 e 2, non può superarli ma in entrambi i casi resta nel punto con probabilità q e p rispettivamente. Si determini lo stato limite del sistema.

[**R:** $t = (q^4C \quad pq^3C \quad p^2q^2C \quad p^3qC \quad p^4C)$; $C = \frac{p-q}{p^5 - q^5}$]

Esercizio 10.16

Dato il seguente diagramma di transizione



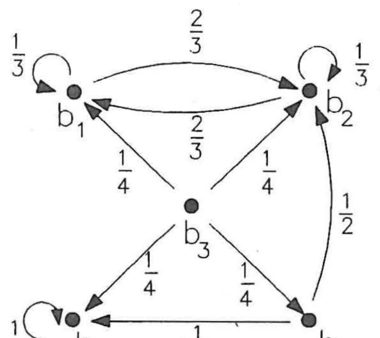
si scriva la matrice di transizione e si calcolino le probabilità di assorbimento $\pi_0(x)$ $(x = 0, 1, 2, 3)$ nello stato a_0 partendo dal generico stato x.

[**R:** $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

$\pi_0(0) = 1,\ \pi_0(1) = \dfrac{q}{1-qp},\ \pi_0(2) = \dfrac{q^2}{1-qp},\ \pi_0(3) = 0$]

Esercizio 10.17

Data la catena di Markov a 5 stati $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ caratterizzata dal seguente diagramma di transizione:



a) si scriva la matrice di transizione;

b) si riconoscano le classi di stati essenziali ed inessenziali;

c) si giustifichi la possibilità di ridurre la catena a 4 stati (a_1, a_2, a_3, a_4) radunando in un unico stato assorbente due stati appartenenti ad una classe essenziale;

d) si scriva la matrice di transizione ridotta della nuova catena così determinata;

e) si calcolino le probabilità asintotiche di assorbimento:

$$\lim_{t\to\infty} P\{X_t = a_1 | X_0 = k\} = \pi_k \qquad k = 1, 2, 3, 4$$

[**R:** $P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $P^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

$\pi_1 = 1,\ \pi_2 = 5/8,\ \pi_3 = 1/2,\ \pi_4 = 0$]

11 PROCESSI STOCASTICI

Definizioni ed esempi

Si suppone di voler stimare un vettore $\underline{s}$, sulla base di un certo numero di dati organizzati in un vettore $\underline{x}$; si dimostra che

- la stima lineare che rende minimo l'errore quadratico medio di stima $\mathcal{E}^2 = E\{(\underline{s} - \hat{\underline{s}})^2\}$ (errore quadratico medio), detta anche "stima di Wiener", è data da
$$\hat{\underline{s}} = C_{SX} C_{XX}^{-1} \underline{x}$$
dove C_{XX} è la matrice di covarianza dei dati $\underline{x}$, mentre $C_{SX} = C_{XS}^{+}$ è la matrice delle covarianze tra $\underline{s}$ ed $\underline{x}$.
- l'errore quadratico medio corrispondente è dato da
$$\mathcal{E}^2 = C_{SS} - C_{SX} C_{XX}^{-1} C_{XS}$$
In particolare questo procedimento viene anche applicato al problema della stima delle componenti di un processo stocastico.

Definizione: si dice processo stocastico discreto una successione $\{X_n\} \in \mathbb{R}^\infty$ le cui componenti siano variabili casuali. La sequenza dei valori x_n è detta "realizzazione del processo stocastico".

Esempi:

a) problema di predizione

Date x_1, x_2, x_3 realizzazioni di un processo stocastico a media nulla, predire x_5:

$$C_{XX} = \begin{bmatrix} E\{X_1^2\} & E\{X_1X_2\} & E\{X_1X_3\} \\ E\{X_1X_2\} & E\{X_2^2\} & E\{X_2X_3\} \\ E\{X_1X_3\} & E\{X_2X_3\} & E\{X_3^2\} \end{bmatrix}$$
$$C_{XS} = \begin{bmatrix} E\{X_1X_5\} \\ E\{X_2X_5\} \\ E\{X_3X_5\} \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}_5 = C_{XS}^{+} C_{XX}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

b) problema di interpolazione

Date x_1, x_2, x_4 realizzazioni di un processo stocastico a media nulla, stimare x_3:

$$C_{XX} = \begin{bmatrix} E\{X_1^2\} & E\{X_1 X_2\} & E\{X_1 X_4\} \\ E\{X_2 X_1\} & E\{X_2^2\} & E\{X_2 X_4\} \\ E\{X_4 X_1\} & E\{X_4 X_2\} & E\{X_4^2\} \end{bmatrix}$$

$$C_{XS} = \begin{bmatrix} E\{X_1 X_3\} \\ E\{X_2 X_3\} \\ E\{X_4 X_3\} \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}_3 = C_{XS}^{+} C_{XX}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

c) problema di filtraggio

Date y_1, y_2, y_3 realizzazioni di un processo stocastico x_n affetto da rumore:

$$Y_n = X_n + \nu_n$$

dove il rumore ν_n è tale che

$$E\{\nu_n\} = 0 \quad , \quad E\{\nu_n^2\} = \sigma_\nu^2 \qquad \forall n$$
$$E\{x_i \nu_j\} = 0 \qquad \forall i, j$$

nota la matrice di covarianza C_{XX}, stimare x_2:

$$\begin{aligned} C_{YY} &= C_{XX} + C_{\nu\nu} = C_{XX} + \sigma_\nu^2 I = \\ &= \begin{bmatrix} E\{X_1^2\} + \sigma_\nu^2 & E\{X_1 X_2\} & E\{X_1 X_3\} \\ E\{X_2 X_1\} & E\{X_2^2\} + \sigma_\nu^2 & E\{X_2 X_3\} \\ E\{X_3 X_1\} & E\{X_3 X_2\} & E\{X_3^2\} + \sigma_\nu^2 \end{bmatrix} \\ C_{YS} &= \begin{bmatrix} E\{Y_1 X_2\} \\ E\{Y_2 X_2\} \\ E\{Y_3 X_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E\{X_1 X_2\} \\ E\{X_2 X_2\} \\ E\{X_3 X_2\} \end{bmatrix} = C_{XS} \end{aligned}$$

$$\hat{x}_2 = C_{YS}^{+} C_{YY}^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Definizione: un processo stocastico si dice stazionario se tutte le distribuzioni congiunte, per un numero qualsiasi di componenti, sono invarianti per traslazioni.

Più semplicemente, quello che si verifica è la stazionarietà in senso debole, che si ha quando le componenti del processo hanno media costante e vale

$$E\{X_t X_{t+\tau}\} = C_\tau$$

In questo caso la matrice C_{XX} ha la caratteristica di avere valori costanti lungo le proprie diagonali

$$C_{XX} = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \dots \\ C_1 & C_0 & C_1 & \\ C_2 & C_1 & C_0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

Modellizzazione delle serie temporali

a) modelli autoregressivi (AR) di ordine p

$$X_n = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k X_{n-k} + \varepsilon_n$$

$$\begin{aligned} \text{dove} \quad & E\{\varepsilon_j\} = E\{X_\ell\} = 0 \qquad \forall j, \forall \ell \\ & E\{\varepsilon_j \varepsilon_k\} = \sigma_\varepsilon^2 \delta_{jk} \\ & E\{\varepsilon_j x_k\} = 0 \qquad k < j \end{aligned} \tag{11.1}$$

es.: processo AR di ordine 1

$$X_n = \alpha X_{n-1} + \varepsilon_n$$

condizione di stazionarietà: $|\alpha| < 1$

es.: processo AR di ordine 2 (AR2)

$$X_n = \alpha_1 X_{n-1} + \alpha_2 X_{n-2} + \varepsilon_n$$

condizioni di stazionarietà:

$$|\alpha_2| < 1 \quad , \quad \left|\frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}\right| < 1$$

b) modelli moving average (MA)

$$X_n = \varepsilon_n - \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{n-j}$$

dove ε_n è un rumore tale che

$$E\{\varepsilon_j\} = 0 \qquad \forall j \quad , \quad E\{\varepsilon_j \varepsilon_k\} = \sigma_\varepsilon^2 \delta_{jk}$$

c) modelli autoregressivi moving average (ARMA (p, q))

$$X_n = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k X_{n-k} + \varepsilon_n - \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{n-j}$$

dove ε_n soddisfa le (11.1)

es: p.s. ARMA(1, 1) $X_n = \alpha X_{n-1} + \varepsilon_n - \beta \varepsilon_{n-1}$
ARMA(1, 2) $X_n = \alpha X_{n-1} + \varepsilon_n - \beta_1 \varepsilon_{n-1} - \beta_2 \varepsilon_{n-2}$

Problemi risolti

Esercizio 11.1

Dati i valori

$$\begin{aligned} x_1 &= -1.177 \\ x_2 &= -1.426 \\ x_3 &= -1.331 \end{aligned}$$

realizzazioni di un processo stocastico stazionario a media nulla, sapendo che la funzione di covarianza del processo ha la forma

$$\gamma(k) = C(k) = A\vartheta^k \qquad (A = 4, \vartheta = 0.8)$$

predire $\hat{x}_4, \hat{x}_5$ e calcolare gli errori quadratici medi di stima $\mathcal{E}^2$ corrispondenti.

Svolgimento

Dati del problema:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} -1.177 \\ -1.426 \\ -1.331 \end{bmatrix}$$

Quantità da stimare:

$$\underline{s} = [x_4]$$

Nello svolgere l'esercizio si deve considerare il processo a media nulla, nonostante la media campionaria delle realizzazioni considerate sia ben lontana da 0.

$$C_{XX} = \begin{bmatrix} E\{X_1^2\} & E\{X_1X_2\} & E\{X_1X_3\} \\ E\{X_1X_2\} & E\{X_2^2\} & E\{X_2X_3\} \\ E\{X_1X_3\} & E\{X_2X_3\} & E\{X_3^2\} \end{bmatrix}$$

Per la stazionarietà del processo si ha che $E\{X_tX_{t+\tau}\} = C(\tau)$, cioé la funzione di covarianza dipende solo dalla distanza τ, quindi:

$$C_{XX} = \begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \gamma(2) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \gamma(1) \\ \gamma(2) & \gamma(1) & \gamma(0) \end{bmatrix} =$$

$$
= \begin{bmatrix} A\vartheta^0 & A\vartheta & A\vartheta^2 \\ A\vartheta & A\vartheta^0 & A\vartheta \\ A\vartheta^2 & A\vartheta & A\vartheta^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3.2 & 2.56 \\ 3.2 & 4 & 3.2 \\ 2.56 & 3.2 & 4 \end{bmatrix}
$$

$$
C_{XX}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.694 & -0.556 & 0 \\ -0.556 & 1.139 & -0.556 \\ 0 & -0.556 & 0.694 \end{bmatrix}
$$

Determinazione della matrice delle covarianze tra $\underline{s}$ (quantità da stimare) ed $\underline{x}$ (dati):

$$
\begin{aligned}
C_{XS} &= [E\{\underline{X}X_4\}] = \begin{bmatrix} E\{X_1X_4\} \\ E\{X_2X_4\} \\ E\{X_3X_4\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(3) \\ \gamma(2) \\ \gamma(1) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} A\vartheta^3 \\ A\vartheta^2 \\ A\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.048 \\ 2.56 \\ 3.2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

La predizione è quindi data da: $\hat{x}_4 = C_{SX}C_{XX}^{-1}\underline{x} = C_{XS}^{+}C_{XX}^{-1}\underline{x}$

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_4 &= [2.048\ 2.56\ 3.2] \begin{bmatrix} 0.694 & -0.556 & 0 \\ -0.556 & 1.139 & -0.556 \\ 0 & -0.556 & 0.694 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.177 \\ -1.426 \\ -1.331 \end{bmatrix} \\
\hat{x}_4 &= -1.0648
\end{aligned}
$$

Calcolo dell'errore quadratico medio di stima $\mathcal{E}^2$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}^2 &= C_{SS} - C_{SX}C_{XX}^{-1}C_{XS} \\
C_{SS} &= E\{X_4X_4\} = \gamma(0) = 4 \\
\mathcal{E}^2 &= 4 - [2.048\ 2.56\ 3.2]C_{XX}^{-1} \begin{bmatrix} 2.048 \\ 2.56 \\ 3.2 \end{bmatrix} = 1.44
\end{aligned}
$$

Con gli stessi dati dell'esercizio si calcola la predizione a 2 passi $\hat{x}_5$ e l'errore quadratico medio corrispondente.

La formula da usare è identica al caso precedente; cambierà la matrice delle covarianze tra $\underline{s}$ ed $\underline{x}$, infatti in questo caso si ha:

$$
C_{XS} = [E\{\underline{X}X_5\}] = \begin{bmatrix} E\{X_1X_5\} \\ E\{X_2X_5\} \\ E\{X_3X_5\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(4) \\ \gamma(3) \\ \gamma(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vartheta^4 \\ A\vartheta^3 \\ A\vartheta^2 \end{bmatrix} =
$$

$$= \begin{bmatrix} 1.6348 \\ 2.048 \\ 2.56 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}_5 = C_{SX} C_{XX}^{-1} \underline{x} = -0.85184$$

$$\mathcal{E}^2 = C_{SS} - C_{SX} C_{XX}^{-1} C_{XS} = 4 - 1.6384 = 2.3616$$

Si osservi che $\mathcal{E}^2_{(5)} > \mathcal{E}^2_{(4)}$.

Esercizio 11.2

Siano A, B, C variabili aleatorie indipendenti a media nulla e con uguale varianza $\overline{\sigma}^2$.

Si consideri la serie temporale:

$$X_t = A + Be^t + Ce^{-t}$$

dove t assume valori interi.

Si verifichi se tale serie temporale è stazionaria.

Disponendo di misure (senza errore) di x_{-1} e x_1, si dia, in funzione di esse, la stima lineare di x_0, con la corrispondente varianza degli scarti.

N.B. Si suggerisce di porre $\alpha = 1 + e + 1/e$, $\beta = 1 + e^2 + 1/e^2$, e di sostituire i valori numerici al termine dello sviluppo dei calcoli.

Svolgimento

Affinché il processo stocastico sia stazionario[9] devono essere verificate le due condizioni:

a) $E\{X_t\} =$ costante $= \mu \quad \forall t$
b) $E\{(X_t - \mu)(X_{t+\tau} - \mu)\} = C(\tau)$.

$$E\{X_t\} = E\{A + Be^t + Ce^{-t}\} = E\{A\} + e^t E\{B\} + e^{-t} E\{C\} = 0$$

dato che A, B e C sono variabili aleatorie a media nulla.

[9] Più precisamente, queste due condizioni identificano un processo stazionario in senso debole.

Osservando che A, B e C sono variabili aleatorie indipendenti e quindi

$$E\{AB\} = E\{AC\} = E\{BC\} = 0 \ ,$$

si ha:

$$\begin{aligned}
E\{X_t X_{t+\tau}\} &= E[(A + Be^t + Ce^{-t})(A + Be^{t+\tau} + Ce^{-(t+\tau)}] = \\
&= E[A^2] + E[B^2]e^{2t+\tau} + E[C^2]e^{-2t-\tau} = \\
&= \overline{\sigma}^2 + e^{2t+\tau}\overline{\sigma}^2 + e^{-2t-\tau}\overline{\sigma}^2 = \\
&= \overline{\sigma}^2[1 + e^{2t+\tau} + e^{-2t-\tau}]
\end{aligned}$$

Poiché la funzione di covarianza dipende anche da t, questo processo stocastico non è stazionario.

La predizione lineare ottimale di x_0 ha la seguente espressione:

$$\hat{x}_0 = C_{SX} C_{XX}^{-1} \underline{x},$$

dove $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_{-1} \\ x_1 \end{bmatrix}$, inoltre:

$$C_{XX} = \begin{bmatrix} E\{X_{-1}X_{-1}\} & E\{X_{-1}X_1\} \\ E\{X_{-1}X_1\} & E\{X_1X_1\} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
E\{X_{-1}X_{-1}\} &= E\{(A + Be^{-1} + Ce)^2\} = \overline{\sigma}^2(1 + e^{-2} + e^2) \\
E\{X_1X_1\} &= E\{(A + Be + Ce^{-1})^2\} = \overline{\sigma}^2(1 + e^2 + e^{-2}) \\
E\{X_1X_{-1}\} &= E\{(A + Be + Ce^{-1})(A + Be^{-1} + Ce)\} = \\
&= \overline{\sigma}^2(1 + 1 + 1) = 3\overline{\sigma}^2
\end{aligned}$$

$$C_{XX} = \begin{bmatrix} 1 + e^{-2} + e^2 & 3 \\ 3 & 1 + e^2 + e^{-2} \end{bmatrix} \overline{\sigma}^2 = \overline{\sigma}^2 \begin{bmatrix} \beta & 3 \\ 3 & \beta \end{bmatrix}$$

avendo posto $\beta = 1 + e^2 + \frac{1}{e^2}$.

$$C_{XX}^{-1} = \frac{1}{\overline{\sigma}^2(\beta^2 - 9)} \begin{bmatrix} \beta & -3 \\ -3 & \beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
C_{XS} &= E\{\underline{X}X_0\} = \begin{bmatrix} E\{X_{-1}X_0\} \\ E\{X_1X_0\} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} E\{(A + Be^{-1} + Ce)(A + B + C)\} \\ E\{(A + Be + Ce^{-1})(A + B + C)\} \end{bmatrix} = \overline{\sigma}^2 \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

avendo posto $\alpha = 1 + e + \frac{1}{e}$

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &= \overline{\sigma}^2 \, [\alpha \ \alpha] \, \frac{1}{\overline{\sigma}^2(\beta^2 - 9)} \begin{bmatrix} \beta & -3 \\ -3 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{-1} \\ x_{+1} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{\alpha}{\beta + 3}(x_{-1} + x_1) = 0.3546(x_{-1} + x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha = 4.0862 \\ \beta = 8.5244 \end{cases}$$

La varianza degli scarti è l'errore quadratico medio di stima $\mathcal{E}^2 = C_{SS} - C_{SX} C_{XX}^{-1} C_{XS}$

$$C_{SS} = E\{X_0 X_0\} = E\{(A + B + C)^2\} = 3\overline{\sigma}^2$$

$$C_{SX} C_{XX}^{-1} C_{XS} = \overline{\sigma}^2 [\alpha \ \alpha] \frac{1}{\overline{\sigma}^2(\beta^2 - 9)} \begin{bmatrix} \beta & -3 \\ -3 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \overline{\sigma}^2$$

$$\mathcal{E}^2 = 3\overline{\sigma}^2 - \frac{2\overline{\sigma}^2 \alpha^2}{\beta + 3} = \overline{\sigma}^2 \left(3 - \frac{2\alpha^2}{\beta + 3} \right) = 0.1023 \ \overline{\sigma}^2$$

Esercizio 11.3

Siano

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= 29^\circ.9987 \\ \vartheta_2 &= 30^\circ.0021 \\ \vartheta_3 &= 30^\circ.0008 \end{aligned}$$

tre estrazioni di una serie temporale stazionaria a media $\overline{\vartheta} = 30^\circ$ e di covarianza

$$\begin{aligned} &C_0 = \sigma_0^2 = 2 \times 10^{-6} \\ &C_1 = -\frac{1}{2}\sigma_0^2 \\ &C_i = 0, \quad i \geq 2 \end{aligned}$$

Verificare che tale covarianza è definita positiva. Stimare ϑ_4 in termini di $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ e calcolare la varianza dello scarto.

Svolgimento

Il processo è stazionario ma non è a media nulla. È quindi necessario operare una traslazione per potersi riportare in una situazione semplificata; ponendo $\xi_i = \vartheta_i - \overline{\vartheta}$ si ha:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -0^\circ.0013 \\ \xi_2 &= 0^\circ.0021 \\ \xi_3 &= 0^\circ.0008 \end{aligned}$$

ovviamente $E\{\xi\} = 0$.

Si ha che: $C_{XX} = C_{\xi\xi}$, dove $\underline{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$

$$C_{\xi\xi}^{-1} = \frac{1}{4 \times 10^{-6}} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcolo delle covarianze tra dati e quantità da stimare:

$$C_{\xi S} = [E\{\xi_i \xi_4\}] = \begin{bmatrix} E\{\xi_1 \xi_4\} \\ E\{\xi_2 \xi_4\} \\ E\{\xi_3 \xi_4\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

$$\hat{\xi}_4 = -0.001325$$

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_4 = \hat{\vartheta}_4 - \overline{\vartheta} \quad \Rightarrow \quad \hat{\vartheta}_4 &= \hat{\xi}_4 + \overline{\vartheta} = -0.001325 + 30^\circ \\ &= 29^\circ.998675 \ . \end{aligned}$$

Si osservi che il fatto che ξ_4 sia incorrelato con ξ_1 e ξ_2 non implica che la stima $\hat{\xi}_4$ non dipenda da ξ_1 e ξ_2.

La varianza dello scarto è data da: $\mathcal{E}^2 = C_{SS} - C_{S\xi} C_{\xi\xi}^{-1} C_{\xi S}$, dove:

$$C_{SS} = E\{\vartheta_4 \vartheta_4\} = E\{\xi_4 \xi_4\} = 2 \cdot 10^{-6}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}^2 &= 2\cdot 10^{-6} - [0\ 0\ -1]\frac{10^{-12}}{4\cdot 10^{-6}}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \\
&= 1.25\cdot 10^{-6}
\end{aligned}
$$

Esercizio 11.4

Si consideri la serie temporale

$$
Y_n = X_n + \nu_n \quad , \quad \text{con } X_n = \mathbf{a}\cos n\frac{\pi}{4} + \mathbf{b}\sin n\frac{\pi}{4}
$$

dove $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono due variabili aleatorie a media nulla incorrelate e con uguale varianza $\overline{\sigma}^2 = \frac{3}{4}$, e ν_i è un rumore incorrelato, indipendente da $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ con varianza $\overline{\sigma}^2 = \frac{1}{4}$ indipendente da n. Studiare la stazionarietà della serie e determinare la stima di x_4, in termini di y_1, y_3, con la corrispondente varianza dello scarto.

Svolgimento

Per prima cosa si valuta se la serie temporale X_n è stazionaria:

$$
\begin{aligned}
E\{X_n\} &= E\left\{\mathbf{a}\cos\frac{n\pi}{4} + \mathbf{b}\sin\frac{n\pi}{4}\right\} = E\{\mathbf{a}\}\cos\frac{n\pi}{4} + \\
&+ E\{\mathbf{b}\}\sin\frac{n\pi}{4} = 0
\end{aligned}
$$

infatti le variabili $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono a media nulla.

$$
\begin{aligned}
E\{X_n X_{n+\tau}\} &= E\left\{(\mathbf{a}\cos\frac{n\pi}{4} + \mathbf{b}\sin\frac{n\pi}{4})(\mathbf{a}\cos\frac{(n+\tau)\pi}{4} + \right. \\
&+ \left. \mathbf{b}\sin\frac{(n+\tau)\pi}{4}\right\} = \\
&= E\{\mathbf{a}^2\}\cos\frac{n\pi}{4}\cos\frac{(n+\tau)\pi}{4} + \\
&+ E\{\mathbf{b}^2\}\sin\frac{n\pi}{4}\sin\frac{(n+\tau)\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Ricordando che

$$
\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)
$$

si ottiene

$$E\{X_n X_{n+\tau}\} = \frac{3}{4}\cos\frac{\pi\tau}{4} \ .$$

quindi il processo è stazionario.

La predizione $\hat{x}_4$ è data da $\hat{x}_4 = C_{YS} C_{YY}^{-1} \underline{y}$, dove $\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \end{bmatrix}$; quindi si calcolano le matrici di covarianza:

$$\begin{aligned}
C_{YY} &= C_{XX} + C_{\nu\nu} = C_{XX} + \frac{1}{4}I = \\
&= \begin{bmatrix} E\{X_1X_1\} & E\{X_1X_3\} \\ E\{X_3X_1\} & E\{X_3X_3\} \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$C_{YY}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dato che il rumore ν_n è incorrelato con le variabili **a** e **b** si ha:

$$C_{YS} = C_{XS} = \begin{bmatrix} E\{X_1X_4\} \\ E\{X_3X_4\} \end{bmatrix} = \frac{3}{4}\begin{bmatrix} \cos\frac{3\pi}{4} \\ \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3\sqrt{2}}{8} \\ \frac{3\sqrt{2}}{8} \end{bmatrix}$$

e quindi:

$$\hat{x}_4 = \frac{3}{8}\sqrt{2}[-1 \ 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \end{bmatrix} = \frac{3}{8}\sqrt{2}(y_3 - y_1)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^2 &= C_{SS} - C_{SX} C_{XX}^{-1} C_{XS} \\
\mathcal{E}^2 &= E\{X_4X_4\} - (\frac{3}{8}\sqrt{2})^2[-1 \ 1]\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{8}\right)^2 4 = \frac{3}{16} \ .
\end{aligned}$$

Esercizio 11.5

Dato e_n rumore bianco incorrelato con varianza 1, si costruisca la serie temporale:

$$X_n = e_n - 2e_{n-1} + e_{n-2}$$

a) Provare la stazionarietà della serie.

b) Determinare la funzione di covarianza C_n $\forall n$.

c) Calcolare l'errore quadratico medio della stima $\hat{x}_n$ in termini delle misure x_{n-1} , x_{n-2}.

Svolgimento

e_n è un rumore bianco, quindi

$$E\{e_n\} = 0, \; E\{e_i e_j\} = \overline{\sigma}^2 \delta_{ij} \; ;$$

in questo caso la costante $\overline{\sigma}^2$ è uguale a 1.

- Stazionarietà:

$$E\{X_n\} = E\{e_n\} - 2E\{e_{n-1}\} + E\{e_{n-2}\} = 0 \quad \forall n$$

$$E\{X_n^2\} = E\{e_n^2\} + 4E\{e_{n-1}^2\} + E\{e_{n-2}^2\} = 1 + 4 + 1 = 6 \equiv C_0$$

$$\begin{aligned} E\{X_n X_{n+1}\} &= E\{(e_n - 2e_{n-1} + e_{n-2})(e_{n+1} - 2e_n + e_{n-1})\} = \\ &= -2E\{e_n^2\} - 2E\{e_{n-1}^2\} = -4 \equiv C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\{X_n X_{n+2}\} &= E\{(e_n - 2e_{n-1} + e_{n-2})(e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n)\} = \\ &= E\{e_n^2\} = 1 \equiv C_2 \end{aligned}$$

$$E\{X_n X_{n+k}\} = 0 \equiv C_k \quad , \quad \forall n \quad , \quad \forall k \geq 3$$

Poiché tutte queste quantità non dipendono da n si ha che X_n è stazionario.

- Errore quadratico medio di stima:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^2 &= C_{SS} - C_{SX} C_{XX}^{-1} C_{XS} = C_0 - [C_1 \; C_2] \begin{bmatrix} C_0 & C_1 \\ C_1 & C_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \\ &= 6 - [-4 \;\; 1] \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} = 2.5 \end{aligned}$$

Esercizio 11.6

Data una serie temporale $\{X_n\}$ stazionaria a media nulla con covarianza $C_k = e^{-\alpha|k|}$, $\alpha > 0$, dire per quali valori di α la predizione di x_4 in termini di (x_1, x_2) ha una varianza dello scarto $\sigma^2 < (\frac{1}{2})C_0$.

Svolgimento
L'errore quadratico medio di stima è

$$\mathcal{E}^2 = C_0 - C_{SX}C_{XX}^{-1}C_{XS}$$

$$C_{XX} = \begin{bmatrix} E\{X_1X_1\} & E\{X_1X_2\} \\ E\{X_2X_1\} & E\{X_2X_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 \\ C_1 & C_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & e^{-\alpha} \\ e^{-\alpha} & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{XX}^{-1} = \frac{1}{1 - e^{-2\alpha}} \begin{bmatrix} 1 & -e^{-\alpha} \\ -e^{-\alpha} & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{XS} = \begin{bmatrix} E\{X_1X_4\} \\ E\{X_2X_4\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_3 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-3\alpha} \\ e^{-2\alpha} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}^2 = 1 - \frac{1}{1 - e^{-2\alpha}} \begin{bmatrix} e^{-3\alpha} & e^{-2\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & e^{-\alpha} \\ e^{-\alpha} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-3\alpha} \\ e^{-2\alpha} \end{bmatrix} = 1 - e^{-4\alpha}$$

$$\mathcal{E}^2 < \frac{1}{2}C_0 = \frac{1}{2} \longrightarrow 1 - e^{-4\alpha} < \frac{1}{2}$$

$$-4\alpha > \log\frac{1}{2} = -0.693147$$

$$\alpha < \frac{0.693147}{4} = 0.173287$$

Esercizio 11.7

Si consideri il processo stocastico $X_t = A\sin(\omega t + \varphi)$, dove A e φ sono due variabili aleatorie stocasticamente indipendenti

$$A \sim \mathcal{N}(0, 1)$$
$$\varphi \sim \mathcal{U}[0, 2\pi]$$

Si studi la stazionarietà del processo.

Si stimi il valore $\hat{x}_3$ in funzione delle misure di X a $t = 1,\ t = 2$.

Svolgimento
Per definizione la media di una funzione di variabile aleatoria $X = \psi(Y)$ è data da $E\{\psi(Y)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(Y) f_Y(y) dy$. In questo caso:

$$E\{X_t\} = E\{A\sin(\omega t + \varphi)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} X_t f_A(A) f_\varphi(\varphi) d\varphi\, dA$$

$$A \sim \mathcal{N}(0,1) \to f_A(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-A^2/2}$$

$$\varphi \sim \mathcal{U}(0, 2\pi) \to f_\varphi(\varphi) \begin{cases} = \frac{1}{2\pi} & \text{su } [0, 2\pi] \\ = 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E\{X_t\} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi} A\sin(\omega t + \varphi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-A^2/2} \frac{1}{2\pi} d\varphi dA = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Ae^{-A^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dA \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\omega t + \varphi)}{2\pi} d\varphi = 0 \end{aligned}$$

infatti $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Ae^{-A^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dA = E\{A\} = 0$.

$$\begin{aligned} E\{X_t X_{t+\tau}\} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} X_t X_{t+\tau} f_A(A) f_\varphi(\varphi) d\varphi\, dA = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^2 e^{-A^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dA \int_0^{2\pi} \sin(\omega t + \varphi) \sin(\omega(t+\tau) + \varphi) \frac{d\varphi}{2\pi} = \\ &= \frac{1}{2}\cos\omega\tau - \frac{1}{8\pi}\left[\sin 2\omega t + \omega\tau + 2\varphi\right]_0^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{2}\cos\omega\tau = C(\tau) \end{aligned}$$

quindi questo processo è stazionario.

La stima al tempo $t = 3$ è data da:

$$\hat{x}_3 = C_{SX} C_{XX}^{-1} \underline{x}$$

$$\begin{aligned} C_{XX} &= \begin{bmatrix} E\{X_1X_1\} & E\{X_1X_2\} \\ E\{X_2X_1\} & E\{X_2X_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(0) & C(1) \\ C(1) & C(0) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos\omega \\ \cos\omega & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$C_{XX}^{-1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\sin^2\omega}\begin{bmatrix} 1 & -\cos\omega \\ -\cos\omega & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{XS} = \begin{bmatrix} E\{X_1X_3\} \\ E\{X_2X_3\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(2) \\ C(1) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \cos 2\omega \\ \cos\omega \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}_3 = \frac{1}{2}\left[\cos 2\omega \;\; \cos\omega\right]\frac{2}{\sin^2\omega}\begin{bmatrix} 1 & -\cos\omega \\ -\cos\omega & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_2\cos\omega - x_1$$

Esercizio 11.8

Si consideri il processo stocastico $Y = \mathbf{a} + \mathbf{b}t$, dove $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono variabili aleatorie a media nulla e matrice di covarianza

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}$$

Si supponga di disporre delle misure di Y ai tempi $t = 1, 2$ affette da un rumore ν incorrelato e indipendente da $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, con varianza $\sigma_\nu^2 = 1$. Stimare Y al tempo $t = 3$ in funzione di $y(t_1) = 1.00232$, $y(t_2) = 1.99981$ con il suo errore quadratico medio.

Svolgimento

Per prima cosa si studia la stazionarietà del processo:

$$E\{X_t\} = 0$$

$$\begin{aligned} E\{X_tX_{t+\tau}\} &= E\{(\mathbf{a} + \mathbf{b}t)(\mathbf{a} + \mathbf{b}t + \mathbf{b}\tau)\} = \\ &= E\{\mathbf{a}^2\} + E\{\mathbf{ab}\}(t+\tau) + E\{\mathbf{ab}\}t + E\{\mathbf{b}^2\}t(t+\tau) = \\ &= 4 + 10(t+\tau) + 10t + 30(t+\tau)t = \\ &= 4 + 20t + 30t^2 + 10\tau + 30t\tau \;; \end{aligned}$$

quindi il processo non è stazionario.

Le misure disponibili sono:

$$Y_t = X_t + \nu_t = \mathbf{a} + \mathbf{b}t + \nu_t$$

dove

$$
\begin{aligned}
&E\{\nu_t\} = 0 \\
&E\{\nu\mathbf{a}\} = E\{\nu\mathbf{b}\} = 0 \\
&E\{\nu_t \nu_{t+\tau}\} = 0 \\
&E\{\nu^2\} = \sigma_\nu^2 = 1
\end{aligned}
$$

$$
\hat{x}_3 = C_{SY} C_{YY}^{-1} \underline{y}
$$

$$
C_{SY} \quad = \quad C_{SX} = \begin{bmatrix} E\{X_3X_1\} \\ E\{X_3X_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 134 \\ 234 \end{bmatrix}
$$

$$
C_{YY} \quad = \quad C_{XX} + I \quad , \quad C_{XX} = \begin{bmatrix} E\{X_1X_1\} & E\{X_1X_2\} \\ E\{X_2X_1\} & E\{X_2X_2\} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
E\{X_1X_1\} &= 4 + 20 + 30 = 54 \\
E\{X_2X_2\} &= 4 + 40 + 120 = 164 \\
E\{X_1X_2\} &= 4 + 20 + 10 + 30 + 30 = 94
\end{aligned}
$$

$$
C_{XX} = \begin{bmatrix} 54 & 94 \\ 94 & 164 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad C_{YY} = \begin{bmatrix} 55 & 94 \\ 94 & 165 \end{bmatrix}
$$

$$
C_{YY}^{-1} = \tfrac{1}{239} \begin{bmatrix} 165 & -94 \\ -94 & 55 \end{bmatrix}
$$

$$
\hat{x}_3 = C_{SY} C_{YY}^{-1} \underline{y} = \frac{1}{239} [134 \ 234] \begin{bmatrix} 165 & -94 \\ -94 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.00232 \\ 1.99981 \end{bmatrix} = 2.770763
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}^2 &= C_{SS} - C_{SY} C_{YY}^{-1} C_{YS} = E\{X_3X_3\} - C_{SY} C_{YY}^{-1} C_{YS} = \\
&= 334 - \frac{1}{239} [134 \ 234] \begin{bmatrix} 165 & -94 \\ -94 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 134 \\ 234 \end{bmatrix} = 1.8159
\end{aligned}
$$

Esercizio 11.9 (Aggiornamento della predizione)

Date (si veda l'Es. 11.1)

$$x_1 = -1.177$$
$$x_2 = -1.426$$
$$x_3 = -1.331$$

realizzazioni di un processo stocastico stazionario a media nulla con funzione di covarianza

$$C(k) = 4 \cdot (0.8)^k$$

si erano calcolati

$$\hat{x}_4 = -1.0648 \qquad \mathcal{E}^2_{(\hat{x}_4)} = 1.44$$
$$\hat{x}_5 = -0.85184 \qquad \mathcal{E}^2_{(\hat{x}_5)} = 2.3616$$

Si suppone ora di avere disponibile un'ulteriore osservazione

$$x_4 = -1.697 \ ,$$

si vuole aggiornare la stima di $\tilde{x}_5$ tenendo conto di questo nuovo dato.

Svolgimento

Si definisce "innovazione" la quantità:

$$\varepsilon =: x_4 - \hat{x}_4 = -0.6292 \ ;$$

la varianza di ε coincide con l'errore quadratico medio di stima

$$\sigma^2_\varepsilon = E[(x_4 - \hat{x}_4)^2] = \mathcal{E}^2_{\hat{x}_4} = 1.44$$

Predizione del valore di x_5 dato $\underline{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \varepsilon)]^+$ ($\rightarrow$ aggiornamento della stima)

$$\tilde{x}_5 = C_{SX} C^{-1}_{XX} \underline{x}$$

dove:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.177 \\ -1.426 \\ -1.331 \\ -0.6292 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
C_{XX} &= \begin{bmatrix} C(0) & C(1) & C(2) & E\{X_1\varepsilon\} \\ C(1) & C(0) & C(1) & E\{X_2\varepsilon\} \\ C(2) & C(1) & C(0) & E\{X_3\varepsilon\} \\ E\{X_1\varepsilon\} & E\{X_2\varepsilon\} & E\{X_3\varepsilon\} & \sigma_\varepsilon^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 3.2 & 2.56 & 0 \\ 3.2 & 4 & 3.2 & 0 \\ 2.56 & 3.2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\varepsilon^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{SX} &= \begin{bmatrix} E\{X_1X_5\} \\ E\{X_2X_5\} \\ E\{X_3X_5\} \\ E\{\varepsilon X_5\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(4) \\ C(3) \\ C(2) \\ E\{X_4X_5\} - E\{\hat{X}_4X_5\} \end{bmatrix} \\
E\{X_4X_5\} &= C(1) = 3.2 \\
E\{\hat{X}_4X_5\} &= [C(3)C(2)C(1)]C_{XX}^{-1} \begin{bmatrix} E\{X_1X_5\} \\ E\{X_2X_5\} \\ E\{X_3X_5\} \end{bmatrix} = 2.048
\end{aligned}
$$

allora: $E\{\varepsilon X_5\} = 3.2 - 2.048 = 1.152$

$$
\tilde{x}_5 = \hat{x}_5 + \frac{\varepsilon \cdot E\{\varepsilon X_5\}}{\sigma_\varepsilon^2} = -1.3552
$$

L'errore quadratico medio corrispondente è dato da:

$$
\mathcal{E}_{\tilde{x}_5}^2 = C_{SS} - C_{SX}C_{XX}^{-1}C_{XS}
$$

dove

$$
\begin{aligned}
C_{SS} &= E\{X_5X_5\} = C(0) = 4 \\
\mathcal{E}_{\tilde{x}_5}^2 &= 1.44
\end{aligned}
$$

Osservazione: questi risultati coincidono con la stima di $\hat{x}_5$ dati $(x_1x_2x_3x_4)$; il calcolo risulta però più oneroso.

$$
\hat{x}_5 = C_{SX}C_{XX}^{-1}\underline{x} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
$$

dove:

$$
\begin{aligned}
C_{XX} &= \begin{bmatrix} C(0) & C(1) & C(2) & C(3) \\ & C(0) & C(1) & C(2) \\ & & C(0) & C(1) \\ & & & C(0) \end{bmatrix} \\
C_{XS} &= \begin{bmatrix} C(4) \\ C(3) \\ C(2) \\ C(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6384 \\ 2.048 \\ 2.56 \\ 3.2 \end{bmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\
\hat{x}_5 &= -1.3552 \\
\mathcal{E}^2 &= 1.44
\end{aligned}
$$

Esercizio 11.10

Sia $X(t)$ un processo stocastico stazionario con funzione di covarianza

$$C(t) = \frac{1}{2} e^{-t/3} \cos\left(\frac{t}{4} - \frac{1}{6}\right)$$

Vengono osservati con rumore di osservazione $\varepsilon(t)$, la cui varianza è $\sigma_\varepsilon^2 = 0.05$, i valori

$$
\begin{aligned}
y(1) = x(1) + \varepsilon(1) = 0.8024 \\
y(2) = x(2) + \varepsilon(2) = 0.6571
\end{aligned}
$$

a) Calcolare la stima dei valori filtrati di $x(1)$ e $x(2)$.

b) Viene ora misurato con lo stesso rumore di osservazione il valore $y(4) = x(4) + \varepsilon(4) = 0.3287$. Determinare il valore aggiornato di $x(2)$ sulla base di questo nuovo dato.

Svolgimento

La funzione di covarianza è:

$$C(t) = \frac{1}{2} e^{-t/3} \cos\left(\frac{t}{4} - \frac{1}{6}\right)$$

quindi si ha:

$$
\begin{aligned}
C(0) &= 0.49307 \\
C(1) &= 0.35720 \\
C(2) &= 0.24258 \\
C(3) &= 0.15352
\end{aligned}
$$

$$C_{XX} = \begin{bmatrix} C(0) & C(1) \\ C(1) & C(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.49307 & 0.35702 \\ 0.35702 & 0.49307 \end{bmatrix}$$

$$C_{YY} = C_{XX} + \sigma_\varepsilon^2 I = \begin{bmatrix} 0.54307 & 0.35702 \\ 0.35702 & 0.54307 \end{bmatrix}$$

$$C_{YY}^{-1} = \begin{bmatrix} 3.24295 & -2.13195 \\ -2.13195 & 3.24295 \end{bmatrix}$$

$$\text{dati} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8024 \\ 0.6571 \end{bmatrix},$$

Stima dei valori filtrati:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = C_{XX} C_{YY}^{-1} \underline{y} = \begin{bmatrix} 0.742338 \\ 0.636087 \end{bmatrix}$$

e di: $\hat{x}(4) = C_{YS} C_{YY}^{-1} \underline{y} = [C(3)\ C(2)] C_{YY}^{-1} \left[\begin{smallmatrix} 0.8024 \\ 0.6571 \end{smallmatrix}\right] = 0.286362$

Si considera ora il nuovo dato $x_4 = 0.3287$, si vuole quindi stimare $\tilde{x}_2$ sulla base di $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ x_4 - \hat{x}_4 \end{bmatrix}$

$$\tilde{x}_2 = \hat{x}_2 + \frac{C_{Se} \cdot e_4}{\sigma_\varepsilon^2}$$

dove: $e_4 = x_4 - \hat{x}_4 = 0.042338$

$$C_{Se} = C(2) - [C(3)\ C(2)] C_{YY}^{-1} \begin{bmatrix} C(1) \\ C(0) \end{bmatrix} = 0.022969$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon^2 &= E\{(X_4 - \hat{X}_4)^2\} = \\ &= C(0) + 0.05 - [C(3)\ C(2)] C_{YY}^{-1} \begin{bmatrix} C(3) \\ C(2) \end{bmatrix} = 0.434599 \end{aligned}$$

da cui si ottiene $\tilde{x}_2 = 0.638324$.

Esercizio 11.11

Sia $\{X_t\}$ un processo stocastico stazionario a media nulla e con funzione di covarianza

$$C(\tau) = e^{-|\tau|}$$

Di una certa realizzazione si è osservato il valore

$$m = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = 1$$

Si trovi la miglior predizione lineare di x_1 e x_2 con i relativi errori quadratici medi di stima.

Svolgimento
Si consideri:

$$\begin{aligned} M &= \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = A\underline{X} \\ C_{MM} &= \sigma_M^2 = A^+ C_{XX} A \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} C_{XX} &= \begin{bmatrix} C(0) & C(1) & C(2) \\ C(1) & C(0) & C(1) \\ C(2) & C(1) & C(0) \end{bmatrix} \\ C_{XX} &= \begin{bmatrix} 1 & e^{-1} & e^{-2} \\ e^{-1} & 1 & e^{-1} \\ e^{-2} & e^{-1} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{9}\{2(1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2}) + (1 + \frac{2}{e})\} = \frac{3e^2 + 4e + 2}{9e^2}$$

$$\begin{aligned} E\{MX_1\} &= \frac{1}{3}\{C(0) + C(1) + C(2)\} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2}\right) = \\ &= \frac{e^2 + e + 1}{3e^2} \, . \end{aligned}$$

$$E\{MX_2\} = \frac{1}{3}\{(C1) + C(0) + C(1)\} = \frac{2+e}{3e}$$

$$\hat{x}_1 = \frac{E\{MX_1\}}{\sigma_M^2} \cdot 1 = \frac{3(e^2+e+1)}{3e^2+4e+2}$$

$$\hat{x}_2 = \frac{E\{MX_2\}}{\sigma_M^2} \cdot 1 = \frac{3e(2+e)}{3e^2+4e+2}$$

$$\mathcal{E}_{\hat{x}_1}^2 = C(0) - \frac{E\{MX_1\}^2}{\sigma_M^2} = 1 - \frac{(e^2+e+1)^2}{e^2(3e^2+4e+2)}$$

$$\mathcal{E}_{\hat{x}_2}^2 = C(0) - \frac{E\{MX_2\}^2}{\sigma_M^2} = 1 - \frac{(2+e)^2}{3e^2+4e+2}$$

Esercizio 11.12

Di due grandezze stocastiche X_1, X_2 è nota la matrice di covarianza

$$C_{XX} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Vengono osservate due combinazioni lineari:

$$\begin{aligned} Y_1 &= 3X_1 - 2X_2 \\ Y_2 &= 2X_1 + 3X_2 \end{aligned}$$

con rumore di osservazione a componenti incorrelate, con varianza $\sigma_\nu^2 = 0.2$, e incorrelato a sua volta con Y_1 e Y_2.

Si determini l'errore quadratico medio di $\hat{x}_1$ sulla base di tali osservazioni.

Svolgimento

Si considera il seguente modello

$$\underline{Y} = A\underline{X} + \nu$$

dove:

$$\begin{cases} Y_1 = 3X_1 - 2X_2 \\ Y_2 = 2X_1 + 3X_2 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Per calcolare la matrice di covarianza delle quantità osservate si noti che

$$C^*_{YY} = AC_{XX}A^+ = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -7 & 43 \end{bmatrix}$$

Aggiungendo il rumore di osservazione si ha:

$$C_{YY} = C^*_{YY} + I\sigma^2_\nu = \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -7 & 43 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.2 & -7 \\ -7 & 43.2 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1}_{YY} = \begin{bmatrix} 0.123981 & 0.02009 \\ 0.02009 & 0.026403 \end{bmatrix}$$

L'errore quadratico medio richiesto è dato da:

$$\mathcal{E}^2_{(\hat{x}_1)} = C_{SS} - C_{SY}C^{-1}_{YY}C_{YS}$$

dove:

$$C_{SS} = E\{X_1X_1\} = 1$$

$$C_{YS} = \begin{bmatrix} E\{X_1Y_1\} \\ E\{X_1Y_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3E\{X_1X_1\} - 2E\{X_1X_2\} \\ 2E\{X_1X_1\} + 3E\{X_1X_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}^2_{(\hat{x}_1)} = 1 - [1 \;\; 5]C^{-1}_{YY}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = 0.015044$$

Esercizio 11.13

Sia $\{X_t\}$ un processo autoregressivo di ordine 1

$$X_t = aX_{t-1} + \nu_t$$

Sapendo che

$$x_1 = 0.8$$
$$x_2 = 0.3$$
$$x_3 = 1.2$$

si determinino a e σ_ν^2 usando le equazioni di Yule-Walker. A tale scopo si usino i valori empirici $\hat{C}_{XX}(0), \hat{C}_{XX}(1)$ stimati per mezzo delle stime "non corrette".

Svolgimento

Per il calcolo dei valori empirici $\hat{C}(0)$ e $\hat{C}(1)$ date N realizzazioni del processo $x_0, x_1 \dots x_N$, ci sono due possibili procedimenti:

i) **calcolo delle stime corrette**

$$\hat{C}(p) = \frac{1}{N-p+1} \sum_{n=0}^{N-p} X_n X_{n+p} \ ,$$

in generale queste non sono stime definite positive.

ii) **calcolo delle stime non corrette**

$$\hat{C}(p) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N-p} X_n X_{n+p} \ ,$$

che sono valori definiti positivi ma dei quali non è assicurata la correttezza.

L'esercizio richiede il calcolo di $\hat{C}_{(0)}$ e $\hat{C}_{(1)}$ nel secondo modo.

$$\begin{aligned}
\hat{C}(0) &= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} x_i^2 = \frac{1}{3}(0.64 + 0.09 + 1.44) = 0.72\overline{3} \\
\hat{C}(1) &= \frac{1}{3} \cdot (x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3) = \frac{1}{3}(0.24 + 0.36) = 0.2 \ .
\end{aligned}$$

Le equazioni di Yule-Walker sono date da:

$$\begin{cases} C(0) = E\{X_t^2\} = aE\{X_t X_t\} + E\{X_t \nu_t\} = aC(1) + \sigma_\nu^2 \\ C(1) = E\{X_{t-1} X_t\} = aE\{X_{t-1} X_{t-1}\} = aC(0) \end{cases}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\hat{C}(1)}{\hat{C}(0)} = \frac{0.2}{0.723} = 0.2765 \\ \sigma_\nu^2 &= \hat{C}(0) - a\hat{C}(1) = 0.66803 \end{aligned}$$

Esercizio 11.14

È data la serie temporale

$$X_n = \alpha_1 X_{n-1} + \alpha_2 X_{n-2} + \varepsilon_n$$

con $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/6$, $\sigma_\varepsilon^2 = 1$

a) Verificare se i coefficienti sono accettabili per un processo AR(2) stazionario.

b) Calcolare $C(0)$ e determinare la funzione di covarianza $C(k)$.

Svolgimento

• Per prima cosa si verifica la stazionarietà:

$$|\alpha_2| = |1/6| < 1$$

$$\left|\frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}\right| = \left|\frac{1/6}{5/6}\right| = \frac{1}{5} < 1$$

quindi è un modello ammissibile di processo AR(2).

• Per determinare $C(0)$ si parte dalla seguente relazione:

$$C(0)K = \sigma_\varepsilon^2 = 1$$

dove $K =: \frac{1+\alpha_2}{1-\alpha_2}[(1-\alpha_2)^2 - \alpha_1^2]$; in questo caso

$$K = \frac{14}{15} \Rightarrow C(0) = \frac{1}{K} = \frac{15}{14}$$

• Determinazione dei primi valori della funzione di covarianza:

$$\begin{cases} C(1) = \alpha_1 C(0) + \alpha_2 C(1) \\ C(2) = \alpha_1 C(1) + \alpha_2 C(0) \\ C(3) = \alpha_1 C(2) + \alpha_2 C(1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} C(1) &= \frac{\alpha_1 C(0)}{1-\alpha_2} = \frac{3}{14} \\ C(2) &= \alpha_1 C(1) + \alpha_2 C(0) = \frac{3}{14} \\ C(3) &= \alpha_1 C(2) + \alpha_2 C(1) = \frac{1}{14} \end{aligned}$$

• Per determinare la funzione di covarianza $C(k)$ $\forall k$, si deve risolvere l'equazione algebrica di II grado:

$$\begin{gathered} t^2 - \frac{1}{6}t - \frac{1}{6} = 0 \\ 6t^2 - t - 1 = 0 \end{gathered}$$

le cui soluzioni sono

$$t_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad t_2 = -\frac{1}{3} \, .$$

La funzione di covarianza è:

$$C(k) = \lambda_1 t_1^k + \lambda_2 t_2^k = \lambda_1 (\frac{1}{2})^k + \lambda_2 (-\frac{1}{3})^k \; ;$$

per determinare le costanti λ_1, λ_2 si risolve il sistema:

$$\begin{cases} C(0) = \lambda_1 (t_1)^0 + \lambda_2 (t_2)^0 = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{15}{14} \\ C(1) = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 = \lambda_1 \frac{1}{2} + \lambda_2 (-\frac{1}{3}) = \frac{3}{14} \end{cases}$$

ottenendo:

$$\lambda_1 = \frac{24}{35} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{27}{70}$$

e quindi:

$$C(k) = \frac{24}{35} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{27}{70} \left(-\frac{1}{3}\right)^k$$

Esercizio 11.15

Dati i valori $x_0 = 1.014, x_1 = -2.182, x_2 = -2.067$ realizzazioni di un processo AR2 di parametri

$$\alpha_1 = 0.6 \quad , \quad \alpha_2 = -0.1 \quad , \quad \sigma_\varepsilon^2 = 2.6$$

predire x_3, x_4 e calcolare i corrispondenti errori di predizione.

Svolgimento

Un processo autoregressivo di ordine 2 si scrive nel seguente modo:

$$\begin{aligned} X_n &= \alpha_1 X_{n-1} + \alpha_2 X_{n-2} + \varepsilon_n = \\ &= 0.6X_{n-1} - 0.1X_{n-2} + \varepsilon_n \end{aligned}$$

- Compatibilità dei coefficienti:

$$\begin{aligned} &|\alpha_2| = 0.1 < 1 \\ &|\frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}| = \frac{0.1}{0.4} = 0.25 < 1 \end{aligned}$$

- Predizione a 1 passo. Il problema si generalizza nel seguente modo:

noti $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots$ si vuole predire x_n

$$\begin{aligned} \hat{x}_n &= E\{X_n | X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots\} = \\ &= E\{\alpha_1 X_{n-1} + \alpha_2 X_{n-2} + \varepsilon_n | X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots\} = \\ &= \alpha_1 x_{n-1} + \alpha_2 x_{n-2} \ ; \end{aligned}$$

l'errore nella predizione a 1 passo è quindi dato da

$$e_1 = x_n - \hat{x}_n = \varepsilon_n \Rightarrow \mathcal{E}_{\hat{x}_n}^2 \ = \ \sigma_\varepsilon^2$$

Nell'esercizio si ha quindi:

$$\hat{x}_3 \ = \ \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1 = -1.022$$

$$\mathcal{E}_{\hat{x}_3}^2 \ = \ \sigma_\varepsilon^2 = 2.6 \ .$$

- Predizione a 2 passi:

noti $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots$, si vuole predire x_{n+1}

$$\begin{aligned}
X_{n+1} &= \alpha_1 X_n + \alpha_2 X_{n-1} + \varepsilon_{n+1} \\
\hat{x}_{n+1} &= E\{X_{n+1} | X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots\} = \\
&= \alpha_1 E\{X_n | X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots\} + \alpha_2 E\{X_{n-1} | X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots\} \\
&= \alpha_1 \hat{x}_n + \alpha_2 x_{n-1}
\end{aligned}$$

l'errore nella predizione a 2 passi è dato da

$$\begin{aligned}
e_2 &= x_{n+1} - \hat{x}_{n+1} = \alpha_1 x_n + \alpha_2 x_{n-1} + \varepsilon_{n+1} - \alpha_1 \hat{x}_n - \alpha_2 x_{n-1} \\
&= \alpha_1 (x_n - \hat{x}_n) + \varepsilon_{n+1} = \alpha_1 \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} \\
\Rightarrow \mathcal{E}^2_{\hat{x}_{n+1}} &= \alpha_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \alpha_1^2) \ ;
\end{aligned}$$

nell'esercizio si ha quindi:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_4 &= \alpha_1 \hat{x}_3 + \alpha_2 x_2 = -0.4065 \\
&= -0.4065 \\
\mathcal{E}^2_{\hat{x}_4} &= 2.6(1 + (0.6)^2) = 3.536
\end{aligned}$$

Esercizio 11.16

Dato il processo stocastico

$$\begin{aligned}
X_n &= \alpha_1 X_{n-1} + \alpha_2 X_{n-2} + \varepsilon_n \\
&= \frac{2}{3} X_{n-1} - \frac{4}{9} X_{n-2} + \varepsilon_n
\end{aligned}$$

verificare se i coefficienti sono accettabili per un processo AR(2) stazionario e determinare la funzione di covarianza, sapendo che $\sigma_\varepsilon^2 = 7/3$.

Svolgimento

- Compatibilità dei coefficienti:

$$|\alpha_2| = \frac{4}{9} < 1$$

$$\left| \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2} \right| = \left| \frac{2/3}{1 + 4/9} \right| = \frac{18}{39} < 1$$

- Funzione di covarianza: $\qquad C(0)K = \sigma_\varepsilon^2 = \frac{7}{3}$

$$K = \frac{1+\alpha_2}{1-\alpha_2}[(1-\alpha_2)^2 - \alpha_1^2] = \frac{665}{1053}$$

$$\begin{aligned} C(0) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{K} = \frac{351}{95} \\ C(1) &= \frac{\alpha_1 C(0)}{1-\alpha_2} = \frac{162}{95} \\ C(2) &= \alpha_1 C(1) + \alpha_2 C(0) = -\frac{48}{95} \,. \end{aligned}$$

Per determinare la funzione di covarianza $\forall k$ si deve risolvere la seguente equazione di secondo grado:

$$t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{4}{9} = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{\frac{2}{3} \mp \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{16}{9}}}{2} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Le due radici sono numeri complessi fra loro coniugati.

In generale: $a + ib = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$

$$\rho = \sqrt{a^2+b^2} \quad , \quad \vartheta = \arctan\frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{2}{3}e^{i\,\mathrm{arctan}(-\sqrt{3})} = \frac{2}{3}e^{i(-\frac{\pi}{3})} = \frac{2}{3}(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}) \\ t_2 &= \frac{2}{3}e^{i\,\mathrm{arctan}(+\sqrt{3})} = \frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{3}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) \end{aligned}$$

La funzione di covarianza è quindi:

$$C(k) = \lambda_1 t_1^k + \lambda_2 t_2^k$$

Poiché $C(k)$ è una funzione reale, i numeri λ_1, λ_2 devono essere necessariamente numeri complessi e fra loro coniugati:

$$\lambda_1 = Ce^{-i\varphi} \quad , \quad \lambda_2 = Ce^{i\varphi}$$

$$
\begin{aligned}
C(k) &= Ce^{-i\varphi}\left(\frac{2}{3}\right)^k e^{-ik\frac{\pi}{3}} + Ce^{i\varphi}\left(\frac{2}{3}\right)^k e^{ik\frac{\pi}{3}} = \\
&= C\left(\frac{2}{3}\right)^k 2\cos\left(\varphi + k\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}
$$

Per determinare le costanti C e φ si risolve ora il seguente sistema

$$
\begin{cases} C(0) = Ce^{i\varphi} + Ce^{-i\varphi} = 2C\cos\varphi = \frac{351}{95} \\ C(1) = \frac{4}{3}C\cos(\varphi + \frac{\pi}{3}) = \frac{162}{95} \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} C\cos\varphi - \sqrt{3}C\sin\varphi = \frac{243}{95} \\ C\cos\varphi = \frac{351}{90} \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} C = 1.862489 \\ \varphi = 7^\circ.30576 \end{cases}
$$

Esercizio 11.17

È dato il processo ARMA (1,1)

$$
X_n = -0.7X_{n-1} + \varepsilon_n - 0.8\varepsilon_{n-1}
$$

con ε_n rumore bianco, cioé tale che

$E\{X_n\varepsilon_k\} = 0 \qquad \forall n < k \quad , \quad E\{\varepsilon_n\varepsilon_j\} = \sigma_\varepsilon^2\delta_{nj}$, con $\sigma_\varepsilon^2 = 4$.

Calcolare la funzione di covarianza del processo.

Svolgimento

Prima di scrivere le equazioni di Yule-Walker è utile studiare la correlazione tra il rumore e le componenti del processo:

$$
\begin{aligned}
E\{\varepsilon_n X_n\} &= E\{\varepsilon_n(-0.7X_{n-1} + \varepsilon_n - 0.8\varepsilon_{n-1})\} = \sigma_\varepsilon^2 = 4 \\
E\{\varepsilon_{n-1}X_n\} &= E\{\varepsilon_{n-1}(-0.7X_{n-1} + \varepsilon_n - 0.8\varepsilon_{n-1})\} = \\
&= -0.7E\{\varepsilon_{n-1}X_{n-1}\} - 0.8E\{\varepsilon_{n-1}\varepsilon_{n-1}\} = \\
&= -1.5\sigma_\varepsilon^2 = -6\ .
\end{aligned}
$$

Equazioni di Yule-Walker:

$$
C(0) = E\{X_nX_n\} = -0.7C(1) + E\{X_n\varepsilon_n\} - 0.8E\{X_n\varepsilon_{n-1}\} =
$$

$$
\begin{aligned}
&= -0.7C(1) + 8.8 \\
C(1) &= E\{X_{n-1}X_n\} = E\{X_{n-1}(-0.7X_{n-1} + \varepsilon_n - 0.8\varepsilon_{n-1})\} = \\
&= -0.7C(0) + 4.8 \\
C(2) &= E\{X_{n-2}X_n\} = -0.7C(1) \\
C(K) &= -0.7C(k-1) = (-0.7)^k C(0) \qquad \forall k \geq 2
\end{aligned}
$$

Dalle prime due equazioni si ricavano i valori di $C(0)$ e di $C(1)$

$$
\begin{cases} C(0) = -0.7C(1) + 8.8 \\ C(1) = -0.7C(0) + 4.8 \end{cases}
$$

$$
\Rightarrow C(1) = -2.\overline{6} \ ; \ C(0) = 10.\overline{6}
$$

Esercizio 11.18
È dato il processo ARMA (1,2)

$$
X_n = -0.7X_{n-1} + \varepsilon_n - 0.8\varepsilon_{n-1} - 0.4\varepsilon_{n-2} \ ,
$$

con ε_n rumore bianco, cioé tale che

$E\{X_n\varepsilon_k\} = 0 \qquad \forall n < k \quad , \quad E\{\varepsilon_n\varepsilon_j\} = \sigma_\varepsilon^2\delta_{nj}$, con $\sigma_\varepsilon^2 = 4$.

Si determini la funzione di covarianza del processo.

Svolgimento
Per prima cosa si calcolano le covarianze tra rumore e componenti del processo:

$$
\begin{aligned}
&E\{\varepsilon_n X_n\} = \sigma_\varepsilon^2 = 4 \\
&E\{\varepsilon_{n-1}X_n\} = -0.7E\{X_{n-1}\varepsilon_{n-1}\} - 0.8\sigma_\varepsilon^2 = -6 \\
&E\{\varepsilon_{n-2}X_n\} = -0.7E\{X_{n-1}\varepsilon_{n-2}\} - 0.4\sigma_\varepsilon^2 = 2.6
\end{aligned}
$$

Equazioni di Yule-Walker:

$$
\begin{aligned}
C(0) &= E\{X_n^2\} = -0.7C(1) + E\{X_n\varepsilon_n\} - 0.8E\{X_n\varepsilon_{n-1}\} + \\
&\quad -0.4E\{\varepsilon_{n-2}X_n\} \\
C(1) &= E\{X_{n-1}X_n\} = -0.7C(0) - 0.8 \\
C(2) &= E\{X_{n-2}X_n\} = -0.7C(1) - 1.6
\end{aligned}
$$

Risolvendo il sistema lineare costituito da queste tre equazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} C(0) &= 16.31370 \\ C(1) &= -12.21961 \\ C(2) &= 6.95372 \end{aligned}$$

In generale

$$C(k) = \alpha C(k-1) = \alpha^{k-2} C(2) = 6.95372(-0.7)^{k-2} \qquad \forall k \geq 3$$

Esercizio 11.19

Sia dato un processo di media mobile

$$X_t = \nu_t - \vartheta \cdot \nu_{t-1}$$

dove $\{\nu_t\}$ è un processo di rumore bianco con varianza σ_ν^2.

a) Si scriva la funzione di covarianza di X_t in funzione di σ_ν^2 e ϑ.

b) Supposto che una realizzazione di X_t sia

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.51	0.00	-1.70	2.52	-1.17	-0.27	-0.57	-1.03	-0.64	0.77

si stimino σ_ν^2 e ϑ a partire dalle stime di $C_{XX}(0)$ e $C_{XX}(1)$ (valori non corretti).

Svolgimento

a) $$\begin{aligned} C_{XX}(0) &= E\{X_t X_t\} = E\{\nu_t \nu_t\} + \vartheta^2 E\{\nu_{t-1}\nu_{t-1}\} - 2\vartheta E\{\nu_t \nu_{t-1}\} = \\ &= \sigma_\nu^2 + \vartheta^2 \sigma_\nu^2 \end{aligned}$$

$$C_{XX}(1) = E\{X_t X_{t-1}\} = -\vartheta \sigma_\nu^2$$

b) Stime di $C_{XX}(0)$ e di $C_{XX}(1)$:

$$\hat{C}_{XX}(0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = 1.33306$$

$$\hat{C}_{XX}(1) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} x_i x_{i+1} = -0.60091$$

Le stime di ϑ e σ_ν^2 si ottengono risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} (1 + \vartheta^2)\sigma_\nu^2 = 1.33306 \\ -\vartheta\sigma_\nu^2 = -0.60091 \end{cases}$$

da cui

$$\vartheta_1 = 1.589125,$$
$$\vartheta_2 = -0.629277 \ ;$$

poiché deve essere $|\vartheta| < 1$ la soluzione è $\hat{\vartheta} = -0.629277$ e $\hat{\sigma}_\nu^2 = 0.954921$.

Esercizi

Esercizio 11.20

Sia X_t un processo stocastico a media nulla con funzione di covarianza

$$C(t) = e^{-|t|/2}$$

Si supponga di conoscere i valori

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_{-1} = 2 \; ;$$

si dia la predizione ottimale di x_0 e si calcoli l'errore quadratico medio di predizione.

[**R:** $\hat{x}_0 = 1.33 \quad ; \quad \mathcal{E}^2 = 0.46$]

Esercizio 11.21

È dato il processo stocastico:

$$X_t = Ae^{-\lambda t}$$

dove A e λ sono variabili casuali stocasticamente indipendenti:

$$A \sim \mathcal{N}[0,1]$$
$$\lambda \sim \mathcal{U}[0,1] \; .$$

a) Determinare media e funzione di covarianza del processo; verificare se la serie temporale è stazionaria.

b) Dati i valori

$$x_1 = 0.303265 \quad , \quad x_3 = 0.111565$$

calcolare $\hat{x}_2$ e l'errore quadratico medio di stima.

[**R:** $\hat{x}_2 = 0.179778$]

Esercizio 11.22

Di una serie temporale stazionaria con covarianza:

$$\gamma_k = (-0.9)^k$$

vengono rilevati i valori ai tempi $t = 1, 2, 3, 4$, che vengono utilizzati per stimare $\hat{x}_6$. Di seguito sono indicati i valori di x_i, l'inversa della loro matrice di covarianza e il valore ottenuto di $\hat{x}_6$:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1.5383 \\ x_2 &= 0.8673 \\ x_3 &= -0.8238 \\ x_4 &= 0.9202 \end{aligned}$$

$$C_{\xi\xi}^{-1} = \begin{bmatrix} 5.263158 & 4.736842 & 0. & 0. \\ 4.736842 & 9.526316 & 4.736842 & 0. \\ 0. & 4.736842 & 9.526316 & 4.736842 \\ 0. & 0. & 4.736842 & 5.263158 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}_6 = 0.745362$$

Successivamente si rileva x_5, il cui valore risulta essere: -1.2914. Determinare la stima aggiornata $\tilde{x}_6$, ottenuta tenendo conto anche della rilevazione di x_5, nonché l'errore quadratico medio di stima di $\hat{x}_6$ e $\tilde{x}_6$.

[**R:** $\tilde{x}_6 = 1.162260$; $\mathcal{E}^2_{\tilde{x}_6} = 0.19$; $\mathcal{E}^2_{\hat{x}_6} = 0.3439$]

Esercizio 11.23

Sia dato un processo stocastico stazionario $\{X_t\}$, di cui sono noti i valori ai tempi $t = 1$ e $t = 4$

$$x_1 = -2.97 \quad , \quad x_4 = -0.45$$

Si suppone che la funzione di covarianza di $\{X_t\}$ sia

$$C(\tau) = E\{X_t X_{t+\tau}\} = \frac{1.59}{(1 + \tau^2)}$$

Si dia la stima ottimale del funzionale di $\{X_t\}$

$$Y = x_3 - x_2.$$

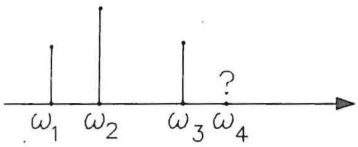
e lo scarto quadratico medio dell'errore medio di stima.

[**R:** $\hat{y} = 0.84$; $\mathcal{E}^2 = 1.12783$]

Esercizio 11.24

Su una realizzazione $\{\omega_k\}$ di un processo stocastico $\underline{\omega}$ si misurano

$$x_1 = \omega_2 - \omega_1$$
$$x_2 = \omega_3 - \omega_2$$



Supponendo che $\underline{\omega}$ sia un processo stocastico stazionario a media nulla con funzione di covarianza

$$C(\tau) = E\{\omega_t \omega_{t+\tau}\} = e^{-\tau^2/4}$$

si dia la predizione ottimale secondo Wiener del valore $Y = \omega_4$ a partire dalla misure x_1, x_2; si calcoli anche l'errore quadratico medio di stima.
[**R:** $\hat{\omega} = 0.238915x_1 + 0.826391x_2$; $\mathcal{E}^2 = 0.597708$]

Esercizio 11.25

Sia dato il processo stocastico retto dall'equazione:

$$X_t = \varepsilon_t - 0.6\ \varepsilon_{t-1} + 0.2\ \varepsilon_{t+2}$$

dove ε_t è un processo di rumore bianco di varianza costante uguale a 1.

Si determini la funzione di covarianza di X_t.
Inoltre, dato $x_1 = 2$ si calcoli $\hat{x}_3$.

Esercizio 11.26

Data una realizzazione di tre valori di un processo stocastico $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, che per ipotesi ha media nulla e covarianza $C(\tau) = E\{\omega_t \omega_{t+\tau}\} = e^{-\frac{\tau^2}{4}}$ si considerano le osservabili

$$x_1 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$
$$x_2 = \frac{\omega_2 + \omega_3}{2}$$

Su di esse si compiono osservazioni che contengono un rumore:

$$y_1 = x_1 + \nu_1$$
$$y_2 = x_2 + \nu_2$$

Sapendo che $E\{\nu_i \omega_k\} = 0$, $E\{\nu_i\} = 0$, $E\{\nu_i^2\} = 0.01$, $E\{\nu_1 \nu_2\} = 0$, e che i valori osservati di y_i sono:

$$y_1 = 0.272$$
$$y_2 = -0.491$$

si dia la stima ottimale di ω_2 ed il relativo errore di stima.

[**R:** $\hat{\omega}_2 = -0.11944$; $\mathcal{E}^2 = 0.029866$]

Esercizio 11.27

Dato un processo stocastico X_t stazionario con covarianza $C(\tau) = 4e^{-0.5|\tau|}$, si osservano i valori

$$\xi_1 = x_1 + \nu_1 = 1.46$$
$$\xi_2 = x_2 + \nu_2 = 2.21$$

dove ν_1 ed ν_2 sono errori indipendenti di misura, con

$$\sigma_{\nu_1}^2 = \sigma_{\nu_2}^2 = 1 \ .$$

Si stimi il vettore $y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

[**R:** $\hat{x}_1 = 1.358585$; $\hat{x}_2 = 1.817196$]

Esercizio 11.28

Sia data la serie temporale:

$$x_n = \cos\frac{\pi}{n}\mathbf{a} + \left(1 - \sin\frac{\pi}{n}\right)\mathbf{b} + \nu_n \qquad n = 3, 4, \ldots$$

dove $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono variabili aleatorie indipendenti con varianza $1/2$ e ν_n è a componenti incorrelate sia fra loro sia con $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

a) Determinare la varianza di ν_n in modo tale che $E\{x_n^2\} = 1 \ \ \forall n$.

b) Con tale varianza, determinare numericamente i coefficienti della stima di x_6 in termini di x_3, x_4.

[**R:** $E\{\nu_n^2\} = \sin\frac{\pi}{n}$; $\hat{x}_6 = -0.054521x_3 + 0.419031x_4$]

Esercizio 11.29

Si consideri il processo definito dall'equazione

$$X_{n+1} = \frac{n}{n+1}X_n + \nu_{n+1} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

dove

$$E\{X_n\} = E\{\nu_n\} = 0$$

$$E\{X_1^2\} = 1$$

$$E\{X_k\nu_n\} = 0 \text{ per } n > k$$

$$E\{\nu_k\nu_n\} = 0 \text{ per } n \neq k$$

a) Determinare $\sigma_{\nu_n}^2$ in modo tale che $\sigma_{X_n}^2$ non dipenda da n.

b) Scrivere la matrice di covarianza di X_1 X_2 X_3.

c) Dire se il processo è stazionario.

[**R:** $\sigma_{\nu_n}^2 = 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$; $C_{XX} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1 \end{bmatrix}$]

Esercizio 11.30

Sia dato un processo autoregressivo del primo ordine

$$X_t = -0.5\ X_{t-1} + \varepsilon_t$$

in cui ε_t sia un rumore bianco, con $\sigma_\varepsilon = 0.5$.

a) Si trovi la funzione di covarianza di X_t.

b) Si dia la predizione di x_1, x_2 e lo scarto quadratico medio del relativo errore di predizione in funzione di x_0.

[**R:** $C(k) = \frac{1}{3}(-0.5)^k$; $\hat{x}_1 = -0.5x_0$; $\mathcal{E}^2_{(\hat{x}_1)} = 0.5$; $\hat{x}_2 = 0.25x_0$; $\mathcal{E}^2_{(\hat{x}_2)} = 0.559017$]

Esercizio 11.31

Sia $\{X_t\}$ un processo autoregressivo di ordine 2

$$X_t = 0.6X_{t-1} - 0.1X_{t-2} + \nu_t$$

con $\sigma_{\nu_t} = 2$. Sapendo che $x_1 = 1, x_2 = -0.5$, si diano i valori predetti $\hat{x}_3, \hat{x}_4$ ed i loro relativi errori quadratici medi di stima.

[**R:** $\hat{x}_3 = -0.4$; $\hat{x}_4 = -0.19$; $\mathcal{E}^2_{(\hat{x}_3)} = 4$; $\mathcal{E}^2_{(\hat{x}_4)} = 5.44$]

Esercizio 11.32

Sia dato un processo AR2 di parametri

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{1}{4} \quad , \quad \sigma^2_\varepsilon = 1\ ;$$

Verificare la stazionarietà dei coefficienti del processo e calcolare i coefficienti della matrice di covarianza $C(\tau)$ per $\tau = 0, 1, \ldots, 4$.

[**R:** $C(0) = \frac{8}{3}; C(1) = \frac{16}{9}; C(2) = \frac{14}{9}; C(3) = \frac{11}{9}; C(4) = 1$]

Esercizio 11.33

Sia $X(t)$ un processo autoregressivo (stazionario) del secondo ordine:

$$X(t) = \alpha_1 X(t-1) + \alpha_2 X(t-2) + \varepsilon(t)$$

con $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$. Sono noti $C(1) = -0.48,\ C(2) = -0.06$.

Determinare α_2 e $C(0)$.

[**R:** $\alpha_2 = -1/4$; $C(0) = 1.2$]

Esercizio 11.34

Sia dato un processo stocastico stazionario a media nulla con matrice di covarianza

$$C(k) = \left(\frac{3}{4}\right)^k - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^k$$

vengono osservati i valori

$$x(0) = 0.8027 \quad , \quad x(1) = 0.6142$$

con rumore di osservazione $\sigma_\nu^2 = 0.1$; determinare la stima a minimo errore quadratico medio di $x(3)$, con il corrispondente errore quadratico medio di stima.

Viene poi osservato $x(2) = 0.0723$. Si aggiorni la stima di $x(3)$ e si determini il nuovo errore.

[**R:** $\hat{x}_3 = 0.234751; \mathcal{E}^2_{\hat{x}_3} = 0.422356; \tilde{x}_3 = 0.078801; \mathcal{E}^2_{\tilde{x}_3} = 0.312616$]

Esercizio 11.35

È dato il processo stocastico autoregressivo di ordine 2:

$$X_n = \frac{1}{2}X_{n-1} - \frac{1}{16}X_{n-2} + \varepsilon_n$$

con $\sigma_\varepsilon^2 = \frac{25}{34}$

Verificare l'ammissibilità dei coefficienti del processo e determinare la funzione di covarianza.

[**R:** $C(k) = \left(\frac{128}{135} + \frac{128}{153}k\right)\left(\frac{1}{4}\right)^k$]

Esercizio 11.36

Sia dato il processo ARMA (1,1)

$$X_n = -\frac{2}{3}X_{n-1} + \varepsilon_n - \beta\varepsilon_{n-1} \; ;$$

si determini β in modo tale che $\rho(1) = \frac{C(1)}{C(0)} = -\frac{56}{69}$.

Si determini inoltre σ_ε^2 in modo che il processo sia stazionario (a meno di una costante di proporzionalità).

[**R:** $\beta = 1/2 \quad ; \quad \sigma_\varepsilon^2 = \frac{20}{69}C(0)$]

Esercizio 11.37

È dato il processo ARMA (2,1)

$$X_n = \frac{1}{6}X_{n-1} + \frac{1}{6}X_{n-2} + \varepsilon_n - \frac{1}{4}\varepsilon_{n-1} \quad , \quad \text{con } \sigma_\varepsilon^2 = 1$$

ε_n processo di rumore bianco tale che

$$E\{X_n\varepsilon_k\} = 0 \qquad \forall n < k \quad , \quad E\{\varepsilon_n\varepsilon_j\} = \sigma_\varepsilon^2\delta_{nj} \ ;$$

calcolare la funzione di covarianza del processo.

[**R:** $C(k) = \frac{3}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{117}{160}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$]

Esercizio 11.38

Sia dato un processo di media mobile retto dall'equazione

$$X_t = \frac{1}{2}\nu_{t-2} + \frac{1}{4}\nu_{t-1} + \nu_t$$

dove ν_t è un rumore bianco

$$E\{\nu_t^2\} = \sigma_\nu^2$$
$$E\{\nu_t\nu_{t+k}\} = 0$$

Si trovi la funzione di covarianza di X_t

$$C(k) = E\{X_tX_{t+k}\} \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots$$

[**R:** $C(0) = \frac{21}{16}\sigma_\nu^2$; $C(1) = \frac{3}{8}\sigma_\nu^2$; $C(2) = \frac{1}{2}\sigma_\nu^2$; $C(k) = 0 \qquad \forall k > 2$]

APPENDICE: Tabelle

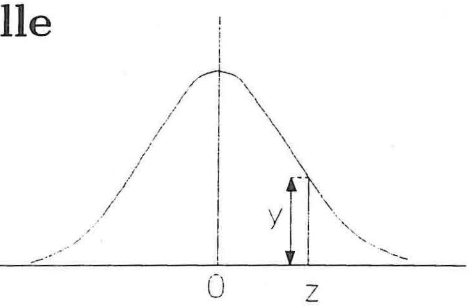
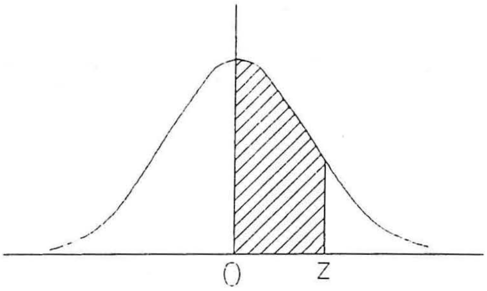


Tabella 1 - y = ordinata della curva normale standardizzata in z.

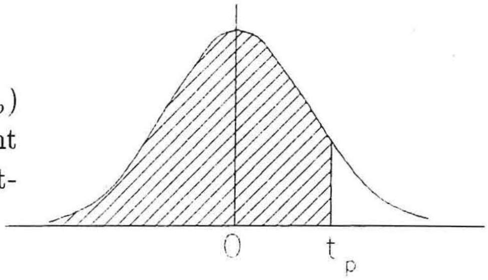
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.3989	.3989	.3989	.3988	.3986	.3984	.3982	.3980	.3977	.3973
0.1	.3970	.3965	.3961	.3956	.3951	.3945	.3939	.3932	.3925	.3918
0.2	.3910	.3902	.3894	.3885	.3876	.3867	.3857	.3847	.3836	.3825
0.3	.3814	.3802	.3790	.3778	.3765	.3752	.3739	.3725	.3712	.3697
0.4	.3683	.3668	.3653	.3637	.3621	.3605	.3589	.3572	.3555	.3538
0.5	.3521	.3503	.3485	.3467	.3448	.3429	.3410	.3391	.3372	.3352
0.6	.3332	.3312	.3292	.3271	.3251	.3230	.3209	.3187	.3166	.3144
0.7	.3123	.3101	.3079	.3056	.3034	.3011	.2989	.2966	.2943	.2920
0.8	.2897	.2874	.2850	.2827	.2803	.2780	.2756	.2732	.2709	.2685
0.9	.2661	.2637	.2613	.2589	.2565	.2541	.2516	.2492	.2468	.2444
1.0	.2420	.2396	.2371	.2347	.2323	.2299	.2275	.2251	.2227	.2203
1.1	.2179	.2155	.2131	.2107	.2083	.2059	.2036	.2012	.1989	.1965
1.2	.1942	.1919	.1895	.1872	.1849	.1826	.1804	.1781	.1758	.1736
1.3	.1714	.1691	.1669	.1647	.1626	.1604	.1582	.1561	.1539	.1518
1.4	.1497	.1476	.1456	.1435	.1415	.1394	.1374	.1354	.1334	.1315
1.5	.1295	.1276	.1257	.1238	.1219	.1200	.1182	.1163	.1145	.1127
1.6	.1109	.1092	.1074	.1057	.1040	.1023	.1006	.0989	.0973	.0957
1.7	.0940	.0925	.0909	.0893	.0878	.0863	.0848	.0833	.0818	.0804
1.8	.0790	.0775	.0761	.0748	.0734	.0721	.0707	.0694	.0681	.0669
1.9	.0656	.0644	.0632	.0620	.0608	.0596	.0584	.0573	.0562	.0551
2.0	.0540	.0529	.0519	.0508	.0498	.0488	.0478	.0468	.0459	.0449
2.1	.0440	.0431	.0422	.0413	.0404	.0396	.0387	.0379	.0371	.0363
2.2	.0355	.0347	.0339	.0332	.0325	.0317	.0310	.0303	.0297	.0290
2.3	.0283	.0277	.0270	.0264	.0258	.0252	.0246	.0241	.0235	.0229
2.4	.0224	.0219	.0213	.0208	.0203	.0198	.0194	.0189	.0184	.0180
2.5	.0175	.0171	.0167	.0163	.0158	.0154	.0151	.0147	.0143	.0139
2.6	.0136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110	.0107
2.7	.0104	.0101	.0099	.0096	.0093	.0091	.0088	.0086	.0084	.0081
2.8	.0079	.0077	.0075	.0073	.0071	.0069	.0067	.0065	.0063	.0061
2.9	.0060	.0058	.0056	.0055	.0053	.0051	.0050	.0048	.0047	.0046
3.0	.0044	.0043	.0042	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036	.0035	.0034
3.1	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026	.0025	.0025
3.2	.0024	.0023	.0022	.0022	.0021	.0020	.0020	.0019	.0018	.0018
3.3	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014	.0013	.0013
3.4	.0012	.0012	.0012	.0011	.0011	.0010	.0010	.0010	.0009	.0009
3.5	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007	.0007	.0007	.0006
3.6	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0004
3.7	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003	.0003	.0003	.0003
3.8	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
3.9	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001	.0001

Tabella 2 - Aree sottese dalla curva normale standardizzata.



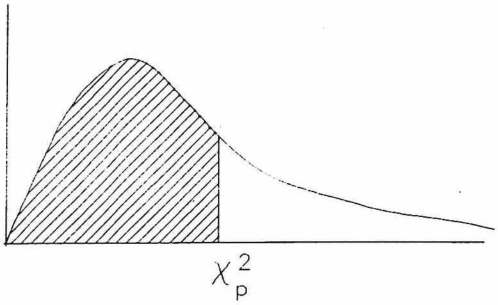
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0754
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2258	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2996	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.7	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.8	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.9	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000

Tabella 3 - Valori percentuali (t_p) per la distribuzione t di Student con ν gradi di libertà (area tratteggiata $= p$).



ν	$t_{.995}$	$t_{.99}$	$t_{.975}$	$t_{.95}$	$t_{.90}$	$t_{.80}$	$t_{.75}$	$t_{.70}$	$t_{.60}$	$t_{.55}$
1	63.66	31.82	12.71	6.31	3.08	1.376	1.000	.727	.325	.158
2	9.92	6.96	4.30	2.92	1.89	1.061	.816	.617	.289	.142
3	5.84	5.54	3.18	2.35	1.64	.978	.765	.584	.277	.137
4	4.60	3.75	2.78	2.13	1.53	.941	.741	.569	.271	.134
5	4.03	3.36	2.57	2.02	1.48	.920	.727	.559	.267	.132
6	3.71	3.14	2.45	1.94	1.44	.906	.718	.553	.265	.131
7	3.50	3.00	2.36	1.90	1.42	.896	.711	.549	.263	.130
8	3.36	2.90	2.31	1.86	1.40	.889	.706	.546	.262	.130
9	3.25	2.82	2.26	1.83	1.38	.883	.703	.543	.261	.129
10	3.17	2.76	2.23	1.81	1.37	.879	.700	.542	.260	.129
11	3.11	2.72	2.20	1.80	1.36	.876	.697	.540	.260	.129
12	3.06	2.68	2.18	1.78	1.36	.873	.695	.539	.259	.128
13	3.01	2.65	2.16	1.77	1.35	.870	.694	.538	.259	.128
14	2.98	2.62	2.14	1.76	1.34	.868	.692	.537	.258	.128
15	2.95	2.60	2.13	1.75	1.34	.866	.691	.536	.258	.128
16	2.92	2.58	2.12	1.75	1.34	.865	.690	.535	.258	.128
17	2.90	2.57	2.11	1.74	1.33	.863	.689	.534	.257	.128
18	2.88	2.55	2.10	1.73	1.33	.862	.688	.534	.257	.127
19	2.86	2.54	2.09	1.73	1.33	.861	.688	.533	.257	.127
20	2.84	2.53	2.09	1.72	1.32	.860	.687	.533	.257	.127
21	2.83	2.52	2.08	1.72	1.32	.859	.686	.532	.257	.127
22	2.82	2.51	2.07	1.72	1.32	.858	.686	.532	.256	.127
23	2.81	2.50	2.07	1.71	1.32	.858	.685	.532	.256	.127
24	2.80	2.49	2.06	1.71	1.32	.857	.685	.531	.256	.127
25	2.79	2.48	2.06	1.71	1.32	.856	.684	.531	.256	.127
26	2.78	2.48	2.06	1.71	1.32	.856	.684	.531	.256	.127
27	2.77	2.47	2.05	1.70	1.31	.856	.684	.531	.256	.127
28	2.76	2.47	2.05	1.70	1.31	.856	.683	.530	.256	.127
29	2.76	2.46	2.04	1.70	1.31	.854	.683	.530	.256	.127
30	2.75	2.46	2.04	1.70	1.31	.854	.683	.530	.256	.127
40	2.70	2.42	2.02	1.68	1.30	.851	.681	.529	.255	.126
60	2.66	2.39	2.00	1.67	1.30	.848	.679	.527	.254	.126
120	2.62	2.36	1.98	1.66	1 29	.845	.677	.526	.254	.126
∞	2.58	2.33	1.96	1.645	1.28	.842	.674	.524	.253	.126

Tabella 4a - Valori percentuali (χ_p^2) per la distribuzione χ^2 con ν gradi di libertà (area tratteggiata = p).

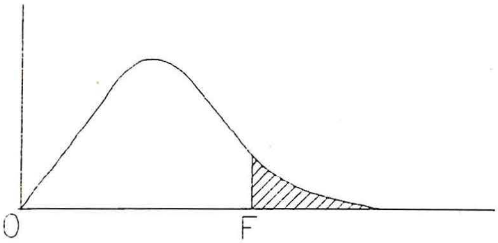


ν	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.99}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.95}$	$\chi^2_{.90}$	$\chi^2_{.75}$	$\chi^2_{.50}$
1	7.88	6.33	5.02	3.84	2.71	1.32	.455
2	10.6	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39
3	12.8	11.3	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37
4	14.9	13.3	11.1	9.4	7.78	5.39	3.36
5	16.7	15.1	12.8	11.1	9.24	6.63	4.35
6	18.5	16.8	14.4	12.6	10.6	7.84	5.35
7	20.3	18.5	16.0	14.1	12.0	9.04	6.35
8	22.0	20.1	17.5	15.5	13.4	10.2	7.34
9	23.6	21.7	19.0	16.9	14.7	11.4	8.34
10	25.2	23.2	20.5	18.3	16.0	12.5	9.34
11	26.8	24.7	21.9	19.7	17.3	13.7	10.3
12	28.3	26.2	23.3	21.0	18.5	14.8	11.3
13	29.8	27.7	24.7	22.4	19.8	16.0	12.3
14	31.3	29.1	26.1	23.7	21.1	17.1	13.3
15	32.8	30.6	27.5	25.0	22.3	18.2	14.3
16	34.3	32.0	28.8	26.3	23.5	19.4	15.3
17	35.7	33.4	30.2	27.6	24.8	20.5	16.3
18	37.2	34.8	31.5	28.9	26.0	21.6	17.3
19	38.6	36.2	32.9	30.1	27.2	22.7	18.3
20	40.0	37.6	34.2	31.4	28.4	23.8	19.3
21	41.4	38.9	35.5	32.7	29.6	24.9	20.3
22	42.8	40.3	36.8	33.9	30.8	26.0	21.3
23	44.2	41.6	38.1	35.2	32.0	27.1	22.3
24	45.6	43.0	39.4	36.4	33.2	28.2	23.3
25	46.9	44.3	40.6	37.7	34.4	29.3	24.3
26	48.3	45.6	41.9	38.9	35.6	30.4	25.3
27	49.6	47.0	43.2	40.1	36.7	31.5	26.3
28	51.0	48.3	44.5	41.3	37.9	32.6	27.3
29	52.3	49.6	45.7	42.6	39.1	33.7	28.3
30	53.7	50.9	47.0	43.8	40.3	34.8	29.3
40	66.8	63.7	59.3	55.8	51.8	45.6	39.3
50	79.5	76.2	71.4	67.5	63.2	56.3	49.3
60	92.0	88.4	83.3	79.1	74.4	67.0	59.3
70	104.2	100.4	95.0	90.5	85.5	77.6	69.3
80	116.3	112.3	106.6	101.9	96.6	88.1	79.3
90	128.3	124.1	118.1	113.1	107.6	98.5	89.3
100	140.2	135.8	129.6	124.3	118.5	109.1	99.3

Tabella 4b - (segue Tabella 4a)

ν	$\chi^2_{.25}$	$\chi^2_{.10}$	$\chi^2_{.05}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.01}$	$\chi^2_{.005}$
1	.102	.0158	.0039	.0010	.0002	.0000
2	.575	.211	.103	.0506	.0201	.0100
3	1.21	.584	.352	.216	.115	.072
4	1.92	1.06	.711	.484	.297	.207
5	2.67	1.61	1.15	.831	.554	.412
6	3.45	2.20	1.64	1.24	.872	.676
7	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	.989
8	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34
9	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73
10	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16
11	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60
12	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07
13	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57
14	10.2	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07
15	11.0	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60
16	11.9	9.31	7.92	6.91	5.81	5.14
17	12.8	10.1	8.67	7.56	6.41	5.70
18	13.7	10.9	9.39	8.23	7.01	6.26
19	14.6	11.7	10.1	8.91	7.63	6.84
20	15.5	12.4	10.9	9.59	8.26	7.43
21	16.3	13.2	11.6	10.3	8.90	8.03
22	17.2	14.0	12.3	11.0	9.54	8.64
23	18.1	14.8	13.1	11.7	10.2	9.26
24	19.0	15.7	13.8	12.4	10.9	9.89
25	19.9	16.5	14.6	13.1	11.5	10.5
26	20.8	17.3	15.4	13.8	12.2	11.2
27	21.7	18.1	16.2	14.6	12.9	11.8
28	22.7	18.9	16.9	15.3	13.6	12.5
29	23.6	19.8	17.7	16.0	14.3	13.1
30	24.5	20.6	18.5	16.8	15.0	13.8
40	33.7	29.1	26.5	24.4	22.2	20.7
50	42.9	37.7	34.8	32.4	29.7	28.0
60	52.3	46.5	43.2	40.5	37.5	35.5
70	61.7	55.3	51.7	48.8	45.4	43.3
80	71.1	64.3	60.4	57.2	53.5	51.2
90	80.6	73.3	69.1	65.6	61.8	59.2
100	90.1	82.4	77.9	74.2	70.1	67.3

Tabella 5a - Distribuzione della F di Fischer per $\alpha = 1\%$, $\nu_1 =$ gradi di libertà del numeratore, $\nu_2 =$ gradi di libertà del denominatore.



$\nu_1 \rightarrow$ $\nu_2 \downarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.19	27.35	27.23
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	11.98	14.80	11.66	14.55
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.17	8.26	8.10	7.98	7.87
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30
13	9.07	6.70	5.71	5.21	1.86	4.62	4.41	4.30	4.19	4.10
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4 69	1.46	4.28	4.11	4.03	3.91
15	8.68	6.36	5.12	4.89	1.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80
16	8.53	6.23	5.29	4.77	1.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69
17	8.40	6.11	5.18	1.67	4.34	1.10	3.93	3.79	3.68	3.59
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51
19	8.18	5.93	5.01	1.50	1.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43
20	8.10	5.85	4.94	1.43	1.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37
21	8.02	5.78	4.87	1.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26
23	7.88	5.66	4.76	1.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21
24	7.82	5.61	1.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13
26	7.72	5.53	4.64	1.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06
28	7.64	5.15	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03
29	7.60	5.12	1.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98
40	7.31	5.18	1.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80
60	7.08	4.98	1.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63
120	6.85	4.79	1.95	3.18	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.61	2.51	2.41	2.32

Tabella 5b - (segue Tabella 5a)

$\nu_1 \rightarrow$ $\nu_2 \downarrow$	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

Tabella 6a - Distribuzione della F di Fischer per $\alpha = 2.5\%$, ν_1 = gradi di libertà del numeratore, ν_2 = gradi di libertà del denominatore.

$\nu_1 \rightarrow$ $\nu_2 \downarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6
2	38.51	39.00	39 17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	8.01	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.13
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.13	2.67
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.18	2.70	2.64
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.18	2.69	2.61	2.55
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53
30	5.67	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05

Tabella 6b - (segue Tabella 6a)

$\nu_1 \rightarrow$ $\nu_2 \downarrow$	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	976.7	984.9	993.1	997.2	1001	1006	1010	1014	1018
2	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
3	14.34	14.25	14.17	14.12	14 08	14.04	13.99	13.95	13.90
4	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
19	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
∞	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

Tabella 7a - Distribuzione della F di Fischer per $\alpha = 5\%$, ν_1 = gradi di libertà del numeratore, ν_2 = gradi di libertà del denominatore.

$\nu_1 \rightarrow$ $\nu_2 \downarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
11	4.84	3.98	3.59	3.35	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
12	4.75	3 89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
15	4.54	3.58	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	1.63	2.54	2.48	2.42
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28
25	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22
30	4.17	3.32	2.92	2.59	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88

Tabella 7b - (segue Tabella 7a)

$\nu_1 \rightarrow$ $\nu_2 \downarrow$	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.41	19.48	19.49	19.50
3	8.19	8.74	8.10	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	5.96	5.91	5.86	5.80	5.11	5.15	5.12	5.69	5.66	5.63
5	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.71	3.74	3.70	3.67
7	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.10	2.66	2.62	2.58	2.54
11	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.51	2.53	2.49	2.45	2.40
12	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.01	2.03	1.98	1.93	1.88
20	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.16
24	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.13
25	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.81	1.82	1.77	1.11
26	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	2.20	2.13	2.06	1.91	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.61
28	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.81	1.82	1.77	1.71	1.65
29	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	2.08	2.00	1.92	1.84	1.19	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	1.99	1.92	1.84	1.75	1.10	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Tabella 8a - Distribuzione della F di Fischer per $\alpha = 10\%$, ν_1 = gradi di libertà del numeratore, ν_2 = gradi di libertà del denominatore.

$\nu_1 \rightarrow$ $\nu_2 \downarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.14	2.09	2.06
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.71	1.68
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.61	1.63

Tabella 8b - (segue Tabella 8a)

$\nu_1 \rightarrow$ $\nu_2 \downarrow$	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.41	9.41	9.48	9.49
3	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
5	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10
6	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.16	2.74	2.72
7	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.41
8	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.91
12	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
13	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
14	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
15	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.12
17	2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.15	1.72	1.69	1.66
19	1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63
20	1.94	1.89	1.84	1.79	1.71	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.10	1.61	1.64	1.60	1.51
23	1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	1.88	1.83	1.72	1.73	1.70	1.61	1.64	1.61	1.51	1.53
25	1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
27	1.85	1.80	1.75	1.70	1.61	1.64	1.60	1.51	1.53	1.49
28	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.41
30	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
40	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
120	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
∞	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00

Tabella 9 - Valori dell'indice $D_{n,p}$ di Kolmogorov-Smirnov in corrispondenza ad una data numerosità n ed una assegnata probabilità p di ottenere un campione il cui indice D_n sia maggiore o uguale a $D_{n,p}$.

$p \rightarrow$ $n \downarrow$	.80	.99	.95	.98	.99
1	.900	.950	.975	.990	.995
2	.684	.776	.842	.900	.929
3	.565	.636	.708	.785	.829
4	.493	.565	.624	.689	.734
5	.447	.509	.563	.627	.669
6	.410	.468	.519	.577	.617
7	.381	.436	.483	.538	.576
8	.358	.410	.454	.507	.542
9	.339	.387	.430	.480	.513
10	.323	.369	.409	.457	.489
11	.308	.352	.391	.437	.468
12	.296	.338	.375	.419	.449
13	.285	.325	.361	.404	.432
14	.275	.314	.349	.390	.418
15	.266	.304	.338	.377	.404
16	.258	.295	.327	.366	.392
17	.250	.286	.318	.355	.381
18	.244	.279	.309	.346	.371
19	.237	.271	.301	.337	.361
20	.232	.265	.294	.329	.352
21	.226	.259	.287	.321	.344
22	.221	.253	.281	.314	.337
23	.216	.247	.275	.307	.330
24	.212	.242	.269	.301	.323
25	.208	.238	.264	.295	.317
26	.204	.233	.259	.290	.311
27	.200	.229	.254	.284	.305
28	.197	.225	.250	.279	.300
29	.193	.221	.246	.275	.295
30	.190	.218	.242	.270	.290
35	.177	.202	.224	.251	.269
40	.165	.189	.210	.235	.252
45	.156	.179	.198	.222	.238
50	.148	.170	.188	.211	.226
60	.136	.155	.172	.193	.207
70	.126	.144	.160	.179	.192
80	.118	.135	.150	.167	.179
90	.111	.127	.141	.158	.169
100	.106	.121	.134	.150	.161

Bibliografia

AA.VV. - *Standard Mathematical Tables* - The Chemical Rubber Co. - Cleveland, 1964

P.Baldi - *Calcolo delle probabilità e statistica* - McGraw-Hill Libri Italia - Milano, 1992

F.Brambilla - *Trattato di statistica - Matematica per statistici - Esercizi di statistica* - a cura di D.M.Cifarelli - UTET - Torino, 1970

M.A.Brovelli, F.Migliaccio - *Trattamento statistico dei dati - Esercizi* - CLUP Città Studi - 1989

N.R.Draper, H.Smith - *Applied Regression Analysis* - John Wiley & Sons, Inc. - New York-London-Sydney, 1966

F.E.Fischer - *Fundamental Statistical Concepts* - Canfield Press San Francisco - 1973

W.Feller - *An Introduction to Probability Theory and its applications* - Vol II - John Wiley & Sons, Inc. - New York-London-Sydney, 1966

B.V.Gnedenko - *Teoria della probabilità* - Editori Riuniti - Edizioni Mir - 1987

C.W.Helstrom - *Probability and Stochastic Processes for Engineers* - Macmillan Publishing Company - 1991

D.V.Lindley - *Introduction to Probability & Statistics from bayesian viewpoint - Part I - Probability* - Cambridge University Press, 1965

D.V.Lindley - *Introduction to Probability & Statistics from bayesian viewpoint - Part II - Inference* - Cambridge University Press, 1965

S.Lipschutz - *Calcolo delle probabilità - 500 Esercizi risolti* - Collana Schaum - ETAS Libri - Milano, 1975

A.M.Mood, F.A.Graybill, D.C.Boes - *Introduction to the Theory of Statistics* - McGraw-Hill Book Company - 1963

A.Papoulis - *Probability, Random Variables and Stochastic Processes* - McGraw-Hill Book Company - 1965

F.Ricci - *Statistica ed elaborazione statistica delle informazioni* - Zanichelli - Bologna, 1975

F.Sansó - *Quaderni di trattamento statistico dei dati - Elementi di teoria della probabilità* - Città Studi Edizioni - Milano, 1996

F.Sansó - *Quaderni di trattamento statistico dei dati - La teoria della stima* - Città Studi Edizioni - Milano, 1996

F.Sansó - *Quaderni di trattamento statistico dei dati - La verifica di ipotesi* - Città Studi Edizioni - Milano, 1996

F.Sansó - *Quaderni di trattamento statistico dei dati - Complementi di teoria della probabilità* - Città Studi Edizioni - Milano, 1997

A.A.Sveshnikov - *Problems in Probability Theory, Mathematical Statistics and Theory of Random Functions* - Dover Publications - New York - 1968

G.Togliatti - *Fondamenti di statistica* - Clup - Milano, 1971